SoC
7130

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167

Exchange.

November 29, 1912.

167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME IX.

DÉPOTS :

LONDRES, chez WILLIAMS et NORGATE, Henrietta Str., 14.

PARIS, chez HERMANN, libraire, rue de la Sorbonne, 6.

BERLIN, chez FRIEDLÄNDER u. Sohn Karlstrasse, 11.

BRUXELLES,
HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112

1912

A

NOV 29 1917

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME IX.

DÉPOTS :

LONDRES, chez WILLIAMS et NORGATE, Henrietta Str., 14.

PARIS, chez HERMANN, libraire, rue de la Sorbonne, 6.

BERLIN, chez FRIEDLÄNDER u. Sohn Karlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 112

1912

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME IX.

1. Sur une correspondance entre les espaces à n et à $2n - 1$ dimensions, par J. Fairon.
2. Sommation de suites terminées, par Haton de la Goupillière.
3. Sur les variétés à trois dimensions qui représentent les couples de points d'une courbe et d'une surface algébriques, par Lucien Godeaux.
4. Étude sur la transformation cruciale étendue à l'espace, par Ch. François.
5. Sur deux lieux géométriques de l'hyperespace et la géométrie des formes binaires, par J. Fairon.
6. Sur les involutions d'ordre np et de rang $(np - 1)$, par J. Fairon.
7. Sur quelques surfaces réglées, par Jean Degueldre.
8. Sur quelques surfaces réglées, par J. Neuberg.
9. Sur les ellipses tritangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements, par A. Gob.
10. Sur les surfaces engendrées par les quadrisécantes de certains quaternes variables de droites, par Jean Degueldre.
11. Calcite de Kelleys (Islande) et de Gotland (Suède). Formes à notation compliquée. Direction des stries, par G. Cesàro.
12. Recherches sur les systèmes de coniques de l'espace, par Lucien Godeaux.
13. Sur la résolution des nombres entiers et positifs de l'équation $ax + by = c$, par G. Cesàro.
14. Sur une conique associée à un triangle, par A. Gob.
15. Développements asymptotiques dans les équations différentielles linéaires à paramètre variable, par Paul Noaillon.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

(AOUT 1912).

Bureau.

Président,	MM. J. Beaupain.
Vice-Président,	J. Deruyts.
Secrétaire général,	C. le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	J. Fairon.

Membres effectifs.

1878 le Paige, C., administrateur inspecteur de l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1879 Jorissen, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1880 Neuberg, J., professeur émérite à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1884 Deruyts, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Ubaghs, P., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1885 Gravis, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1887 Lohest, M., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

De Heen, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1890 Beaupain, J., docteur en sciences, ingénieur en chef au corps des mines.

1897 Cesàro, G., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Michiels, H., docteur en sciences, professeur à l'Athénée royal de Liége.

1898 Hubert, H., professeur à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

1900 Lonay, H., docteur en sciences, chargé de cours à l'École spéciale de commerce annexée à l'université.

1902 Dehalu, M., docteur en sciences, chargé de cours à l'université.

Fairon, J., docteur en sciences, chargé de cours à l'université.

1906 Abraham, A., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1909 Gob, A., professeur de mathématiques à l'Athénée royal de Liége.

1912 Janne, H., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

Damas, D., docteur en sciences, chargé de cours à l'université.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.

1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.

Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.

1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York.

1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.

1871 Henry, L., professeur à l'université de Louvain.

Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.

1872 Garibaldi, professeur à l'université de Gênes.

Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg.

1873 Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.

1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.

Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Czuber, professeur, à Prague.

1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.

Angot, A., directeur du bureau central météorologique de France, à Paris.

1881 Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.

Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.

Quincke, professeur à l'université d'Heidelberg.

Laisant, C.-A., à Paris.

1883 Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.

Gomès Teixeira, F., directeur de l'Académie polytechnique de Porto.

1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.

Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.

Vaněček, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).

1887 Guccia, professeur à l'université de Palerme.

Wullner, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.

Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.

1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École des ponts et chaussées, à Paris.

1898 Gordan, P., professeur à l'université d'Erlangen.

Korteweg, D.-J., professeur à l'université d'Amsterdam.

1898 Lampe, Em., directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, professeur à Berlin.

Mathias, Em., professeur à l'université de Toulouse.

Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.

1902 Versluys, W.-A., docteur en sciences, à Delft.

1904 Lerch, Math., professeur à l'université de Fribourg (Suisse).

Schönfliess, professeur à l'université de Kœnigsberg.

Capelli, Alfr., professeur à l'université de Naples.

Meyer, Franz, professeur à l'université de Kœnigsberg.

W. Kapteyn, professeur à l'université d'Utrecht.

1905 Traube, professeur, à Berlin.

1909 Haton de la Goupillière, membre de l'Institut, à Paris.

Dickstein, S., professeur à Varsovie.

Lebon, E., professeur agrégé de l'université, à Paris.

Maillet, E., docteur ès sciences mathématiques, à Bourg-la-Reine.

1912 Picard, E., membre de l'Institut, à Paris

Painlevé, P., membre de l'Institut, à Paris.

de la Vallée Poussin, Ch., professeur à l'université de Louvain.

Demoulin, A., professeur à l'université de Gand.

II. — Sciences naturelles.

1854 Drouët, H., naturaliste, à Dijon.

1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.

1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille.

Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.

1870 Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.

1871 Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1873 Glaziou, botaniste, à Rio de Janeiro.

De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

Areschoug, professeur à l'université de Lund.

1874 WALDEYER, professeur à l'université de Berlin.

1875 RAY-LANKESTER, directeur du *Britisch Museum (Natural history)*.

PACKARD, professeur à l'université de Salem.

1876 BALFOUR, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 MAC LACHLAN, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 HERTWIG, R., professeur à l'université de Munich.

STRASBURGER, professeur à l'université de Bonn.

BRONGNIART, Charles, à Paris.

1879 WETTERBY, professeur à l'université de Cincinnati.

BOLIVAR, I., professeur, à Madrid.

RITSEMA, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.

1881 TARAMELLI, professeur à l'université de Pavie.

GESTRO, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.

1881 SALVADORI (comte Th.), professeur à l'université de Turin.

1883 HULL, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.

1884 TRINCHESE, professeur à l'université de Naples.

1898 BERTRAND, C.-E., professeur de botanique à la Faculté des sciences de Lille

BLANCHARD, Raphaël, assistant au Museum d'histoire naturelle, à Paris

1904 DURAND, Th., directeur du Jardin botanique de l'État à Bruxelles, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

BARROIS, C., professeur à l'université de Lille.

BOULE, Marcellin, professeur au Museum, à Paris.

OEHLERT, D., conservateur du Musée de Laval (Mayenne)

1904 Portis, A., professeur à l'université de Rome.

von Koenen, A., professeur à l'université de Gœttingen.

de Loriol, P., géologue, à Fontenex.

Grand'Eury, F., ingénieur, à Saint-Étienne.

de Rouville, P., doyen honoraire, à Montpellier.

Cocchi, J., directeur du Musée, à Florence.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Musée royal d'histoire naturelle.
Société royale belge de botanique.
Société belge de microscopie.

Liége. — *Société géologique.*
Association des élèves des Écoles spéciales.

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeurs : MM. P. Mansion et J. Neuberg.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, directeur : M. Lampe (Kurfürstenstr., 139).
Deutsche entomologische Gesellschaft.

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Magdebourg. — *Museum für Natur und Heimatkunde*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.
Monatshefte für Mathematik und Physik, rédacteurs : MM. Escherich et Gegenbauer, professeurs à l'université.

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Drs Juel et Foldberg (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*
Université.

Lyon. — *Académie des sciences, des belles-lettres et des arts.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France*

Paris. — *Société philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.
École polytechnique.
L'intermédiaire des mathématiciens, M. LAISANT (quai des Augustins, 55).

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society.

Glasgow. — *Natural history Society.*
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze* (classe des sciences physiques et mathématiques).

Accademia delle Scienze (classe des sciences morales).

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Reale Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Milan. — *Reale istituto lombardo di Scienze e Lettere.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di Scienze naturali ed economiche, Regia Università.*

Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*

Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra

Portici. — *Reale scuola superiore die agricultura.*

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*

Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.

R. Comitato geologico d'Italia.

Société italienne pour l'avancement des sciences.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal Grand-Ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*

Société des naturalistes luxembourgeois.

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*

Société mathématique.

Delft. — *Académie technique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*

Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

NORWEGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*
Videnskabs Selskabet.

Göteborg. — *Kongl. Vetenskaps och Vitterhetssamhälle.*

Stavanger. — *Museum.*

Throndhjem. — *K. Norske Videnskabers Selskabs.*

PORTUGAL.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

Porto. — *Académie polytechnique, directeur :* M. Gomès Teixeira

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Kazan. — *Société physico-mathématique.*

Kharkoff. — *Société mathématique.*

Kischinew. — *Société des naturalistes de Bessarabie.*

Juriew. — *Université.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

Varsovie. — *Wiadomosci matematyczne*

SUÈDE.

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

Upsal. — *Société royale des Sciences.*

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Genève. — *L'enseignement mathématique,* directeurs : MM. Fehr et Laisant.

Neuchâtel. — *Société des sciences naturelles.*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

—

ÉTATS-UNIS.

Arbor (Mich). — *University of Michigan (Library).*

Austin. — *Texas Academy of sciences.*

Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*

Berkeley (Col.) — *University of California (Press).*

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Cambridge (Mass.). — *Museum of comparative Zoology.*

Chicago. — *Field Museum of natural history.*

Cincinnati (O.) — *American association for the advancement of sciences.*

Cold Spring Harbor (N.Y.). — *Carnegie Institution (station for experimentale evolution;* directeur : M C. B. Davenport).

Colorado. — *Colorado College* (bureau des publications),

Des Moines (Iowa). — *Geological Survey.*

Lawrence (Kan). — *The Kansas University.*

Lincoln (Neb.). — *University of Nebraska.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*
Geological Survey.

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Rochester. — *Academy of sciences.*

Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*

Salem. — *Essex Institute.*

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Urbana (Ill.). — *University of Illinois library.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*
Bureau of ethnology.

CANADA.

Halifax. — *Nova Scotian Institute of natural Science*

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*

Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Merida. — *Observatoire.*

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

URUGUAY.

Montevideo. — *Museo de historia natural.*

ASIE.

—

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*
Koninklijke magnétisch en météorologisch Observatorium.

SIBÉRIE.

Irkutsk. — *Ostsibirische Abtheilung der K. Russischen geographischen Gesellschaft.*

AUSTRALIE.

—

Adelaïde. — *Royal Society of South Australia.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Australian Association for advancement of science.*
Linnean Society.
Royal Society of New South Wales.

SUR UNE

CORRESPONDANCE ENTRE LES ESPACES

à n et à $2n - 1$ dimensions

PAR

J. FAIRON

RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

SUR UNE

CORRESPONDANCE ENTRE LES ESPACES

à n et à $2n - 1$ dimensions.

Dans un travail précédent (*), nous avons montré comment certaines figures réglées de l'espace euclidien pouvaient être étudiées au moyen d'autres figures plus simples de la géométrie plane ; nous avons appelé figures similaires, théorèmes similaires, ... les figures et les théorèmes qui se correspondent dans le plan et l'espace. De là résultent deux géométries, en quelque sorte parallèles, qui donnent une double interprétation des propriétés des formes algébriques ternaires d'ordre quelconque.

Une similitude analogue existe, en général, entre les figures de l'espace linéaire à n dimensions et certaines figures de l'espace à $2n - 1$ dimensions, ayant pour éléments constitutifs des espaces linéaires à $n - 1$ dimensions. Ces nouvelles figures similaires permettent ainsi d'interpréter, à un double point de vue, les propriétés des formes algébriques d'ordre quelconque et à $n + 1$ variables. Elles fournissent un procédé pour étudier l'espace à $2n - 1$ dimensions au moyen de l'espace à n dimensions.

(*) *Sur une correspondance entre le plan et l'espace.* (Bulletin de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique, 1909, pp. 844-885.)

Nous nous proposons d'exposer ici cette similitude dans ses relations principales. Nous appliquerons, au fur et à mesure, nos résultats aux figures similaires les plus intéressantes à considérer de l'espace à trois dimensions et de l'espace à cinq dimensions. Ces dernières ont, comme on le verra, des plans pour éléments constitutifs.

1. — M. Véronèse a établi que la courbe normale d'ordre $2n-1$ de l'espace à $2n-1$ dimensions E_{2n-1}, le système de référence étant convenablement choisi, peut être représentée par les équations paramétriques

$$z_1 : z_2 : \cdots : z_{2n-1} : z_{2n} = \lambda^{2n-1} : \lambda^{2n-2} : \cdots : \lambda : 1.$$

Nous désignons cette courbe par la notation Γ_{2n-1} et nous employons ici et dans la suite des formules non homogènes, soit pour la rapidité de l'écriture, soit parce que des formules homogènes ne nous rendront pas plus de services.

Considérons les relations

$$z_i - z_{i+1}\Sigma\lambda_1 + z_{i+2}\Sigma\lambda_1\lambda_2 - \cdots \pm z_{i+n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = 0, (i = 1, 2, \cdots n) \quad (1)$$

dans lesquelles $\Sigma\lambda_1$, $\Sigma\lambda_1\lambda_2$, ... désignent les fonctions symétriques principales des n quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

Ces relations, au nombre de n, définissent n espaces linéaires à $2n-2$ dimensions qui rencontrent chacun la courbe Γ_{2n-1} en n points; les paramètres de ceux-ci sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Ces espaces ont en commun un espace linéaire $\mathcal{E}_{n-1}$, à $n-1$ dimensions, unissant les n points; les relations ci-dessus sont ainsi les équations de $\mathcal{E}_{n-1}$.

Résolues par rapport à $\Sigma\lambda_1$, $\Sigma\lambda_1\lambda_2$, ..., elles fournissent le système

$$\frac{Z_1}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} = \cdots = \frac{Z_{n-1}}{\Sigma\lambda_1\lambda_2} = \frac{Z_n}{\Sigma\lambda_1} = \frac{Z_{n+1}}{1}, \quad (2)$$

les quantités $Z_1, \dots Z_{n-1}, Z_n, Z_{n+1}$ étant les déterminants que l'on retire de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots z_{n+1} \\ z_2 & z_3 & z_4 & \cdots z_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z_{n+1} & z_{n+2} & \cdots z_{2n} \end{array} \right\|,$$

en supprimant successivement chaque colonne à partir de la dernière.

Si nous faisons abstraction de la variété non linéaire, à $n-1$ dimensions, qui renferme entièrement la courbe Γ_{2n-1} et qui, avec l'espace $\mathcal{E}_{n-1}$, constitue l'intersection complète des espaces d'ordre supérieur dont les équations sont

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_{n+1}\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n, \\ Z_2 &= z_{n+1}\Sigma\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Z_n &= z_{n+1}\Sigma\lambda_1, \end{aligned} \tag{3}$$

les équations (2) peuvent servir à représenter l'espace $\mathcal{E}_{n-1}$; elles sont équivalentes aux formules (1).

Par elles, à tout système de valeurs attribué aux expressions $\Sigma\lambda_1, \Sigma\lambda_1\lambda_2, \dots (\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n)$ correspond, sans ambiguïté, un espace $\mathcal{E}_{n-1}$ de l'espace E_{2n-1}, et un seul.

L'espace $\mathcal{E}_{n-1}$ déterminé ici n'a, évidemment, en commun avec Γ_{2n-1}, que les n points de paramètres $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$; on peut, du reste, établir cette affirmation d'une manière simple. Car si un point de paramètre μ, par exemple, de la courbe est encore dans $\mathcal{E}_{n-1}$, on doit avoir, d'après les relations (1),

$$\mu^n - \mu^{n-1}\Sigma\lambda_1 + \mu^{n-2}\Sigma\lambda_1\lambda_2 - \cdots + \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = 0,$$

formule vérifiée seulement pour $\mu = \lambda_i$.

Enfin, la variété non linéaire à $n-1$ dimensions définie ci-dessus ne renferme aucun espace linéaire à $n-1$ dimensions rencontrant Γ_{2n-1} en n points.

Car, si nous appelons $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n$ les paramètres de n points semblables, tout point de l'espace linéaire à $n-1$ dimensions qui les unit, a des coordonnées de la forme

$$\begin{aligned}
z_1 &= m_1\lambda_1'^{2n-1} + m_2\lambda_2'^{2n-1} + \dots + m_n\lambda_n'^{2n-1},\\
z_2 &= m_1\lambda_1'^{2n-2} + m_2\lambda_2'^{2n-2} + \dots + m_n\lambda_n'^{2n-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
z_{2n-1} &= m_1\lambda'_1 + m_2\lambda'_2 + \dots + m_n\lambda'_n,\\
z_{2n} &= m_1 + m_2 + \dots + m_n;
\end{aligned}$$

et celles-ci, substituées dans les relations (5), ne donnent des identités que pour $\lambda'_i = \lambda_i$ valeurs qui correspondent à l'espace $\mathcal{E}_{n-1}$.

— Prenons actuellement des variables $z_1, z_2, \dots z_{n+1}$ comme coordonnées courantes homogènes dans l'espace linéaire à n dimensions, E_n.

Les formules

$$\frac{z_1}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} = \frac{z_2}{\Sigma\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}} = \dots = \frac{z_n}{\Sigma\lambda_1} = \frac{z_{n+1}}{1},$$

définissent un point de cet espace. Rapprochées des expressions (2), elles nous permettent de faire correspondre ce point à l'espace $\mathcal{E}_{n-1}$ et de regarder ces éléments géométriques comme similaires.

Le nombre des points de l'espace E_n est ∞^n; à chacun d'eux se rapporte un espace bien déterminé $\mathcal{E}_{n-1}$ et réciproquement.

En appelant $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_{n+1}$ les coordonnées courantes d'un point ou celles de l'espace similaire, les formules

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \dots : \zeta_{n+1} = a_1 : a_2 : \dots : a_{n+1}$$

déterminent analytiquement ces éléments suivant que les variables ζ tiennent la place de z ou de Z.

2. — Lorsque les n quantités λ_i deviennent égales entre elles, l'espace $\mathcal{E}_{n-1}$ occupe une position limite; il est tangent, avec n points d'intersection coïncidents, à la courbe Γ_{2n-1} (*).

L'espace $\mathcal{E}_{n-1}$ et son point similaire P de l'espace E_n ont alors pour équations

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \cdots : \zeta_{n+1} = \lambda^n : \binom{n}{1}\lambda^{n-1} : \binom{n}{2}\lambda^{n-2} : \cdots : 1. \qquad (4)$$

Le point P décrit, par conséquent, lorsque λ varie, la courbe normale $\mathcal{C}_n$ de l'espace E_n; les formules (4) sont les équations de cette courbe.

Il résulte de là qu'un groupe de points pris sur la courbe $\mathcal{C}_n$ a pour similaire un groupe composé du même nombre d'espaces $\mathcal{E}_{n-1}$, tangents du n^e ordre à la courbe Γ_{2n-1}. A ces espaces on pourra même substituer, dans certaines questions, les points de contact $\mathfrak{T}$, et alors tout problème relatif aux points P entraînera un problème similaire pour les points $\mathfrak{T}$.

Si les quantités $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ sont données, le point qu'elles définissent dans l'espace E_n occupe, par rapport à la courbe $\mathcal{C}_n$, une situation remarquable : il est le pôle, relativement à cette courbe, de l'espace linéaire E_{n-1} à $n - 1$ dimensions, dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \\ \lambda_1^n & \binom{n}{1}\lambda_1^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n^n & \binom{n}{1}\lambda_n^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (5)$$

espace qui unit, sur $\mathcal{C}_n$, les points de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

On sait que ce pôle est ou non situé dans son espace polaire suivant que n est impair ou pair; qu'il est l'intersection de n espaces linéaires à $n - 1$ dimensions, tangents du n^e ordre à la courbe $\mathcal{C}_n$ aux points de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

(*) Nous dirons, dans la suite, tangent du n^e ordre, contact du n^e ordre, quand il y a n points coïncidents.

3. — En particulier, supposons que n égale 3. Alors, les diverses formules qui précèdent font correspondre à tout point de l'espace euclidien un plan de l'espace à cinq dimensions, trisécant à la courbe normale Γ_3 de cet espace. Les points d'une cubique gauche C_3 répondant aux équations

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \zeta_4 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1 ,$$

ont pour similaires les plans osculateurs, — au sens ordinaire du mot, — à la courbe Γ_3, ou, par extension, les points de celle-ci.

Un plan quelconque de l'espace euclidien possède, par rapport à C_3, quatre points remarquables : ses intersections avec la courbe et son pôle. A ces points correspondent respectivement trois plans osculateurs à Γ_3 aux points de mêmes paramètres que les intersections considérées et le plan trisécant joignant ces trois points.

— Un espace linéaire à trois dimensions rencontre Γ_3 en quatre points seulement; les plans osculateurs en ces points ont pour similaires les sommets d'un tétraèdre inscrit à C_3; les quatre plans trisécants de Γ_3, déterminés par ces points, ont pour similaires les pôles des faces du tétraèdre inscrit à C_3.

Donc, aux huit plans que détermine sur Γ_3 un espace linéaire à trois dimensions correspondent, dans l'espace ordinaire, les huit sommets de deux tétraèdres de Möbius (*). Dans ce dernier espace, en effet, les deux tétraèdres obtenus sont à la fois inscrits et circonscrits l'un à l'autre, ainsi qu'il résulte des propriétés des plans trisécants à C_3 et de leurs pôles.

Les propriétés de points relatives à deux tétraèdres de Möbius ont donc leurs similaires dans l'espace à cinq dimensions.

— Un espace linéaire à quatre dimensions rencontre Γ_3 en cinq points qui, combinés trois à trois, donnent dix plans trisécants à la courbe. La figure similaire est compliquée.

(*) Möbius. (*Journal de Crelle*, t. III, p. 273.) — J. Neuberg, *Sur les tétraèdres de Möbius*. (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 2e série, t. XI.)

4. — Ces préliminaires étant établis, on aperçoit que la discussion de l'équation de degré p, (p pouvant être quelconque),

$$f(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_{n+1}) = 0,$$

donnera les énoncés de propriétés des figures similaires constituées soit par des points de l'espace à n dimensions, soit par des espaces linéaires $\mathcal{E}_{n-1}$ de l'espace à $2n - 1$ dimensions.

Nous nous occuperons surtout, dans ce travail, du cas où la forme f est du premier degré; nous pourrons aussi combiner entre elles plusieurs formes analogues et nous en tirerons quelques conséquences au point de vue de la théorie géométrique de l'involution.

5. — Soient $\alpha_{p,1}, \alpha_{p,2}, \cdots \alpha_{p,n+1}$ les coordonnées d'un point A_p de l'espace à n dimensions E_n.

Les formules

$$\frac{\zeta_1}{\Sigma m_i \alpha_{i,n+1}} = \frac{\zeta_2}{\Sigma m_i \alpha_{i,n}} = \cdots = \frac{\zeta_{n+1}}{\Sigma m_i \alpha_{i,1}}, \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

dans lesquelles $\Sigma m_i \alpha_{iq}$ représente la forme linéaire

$$m_1 \alpha_{1,q} + m_2 \alpha_{2,q} + \cdots + m_n \alpha_{n,q},$$

définissent un point P de cet espace par rapport aux n points A_p connus.

Elles définissent par conséquent aussi, dans l'espace E_{2n-1}, un espace linéaire (P) à $n - 1$ dimensions, similaire du point P.

Lorsque les quantités m_i varient, le point P décrit un espace linéaire, que nous nommerons L_{n-1}, à $n - 1$ dimensions, compris dans E_n ; par suite, l'espace (P) engendre le lieu similaire (L_{n-1}) de l'espace E_{2n-1}.

L'équation de ces lieux, qui s'obtient par l'élimination des quantités m_i, est

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_{n+1} \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & & \alpha_{1,n+1} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

L'espace L_{n-1} contient chacun des points A_p. Il rencontre la courbe normale C_n en n points; ceux-ci ont pour paramètres les racines de la forme binaire que l'on obtient en remplaçant les ζ, dans l'équation précédente, respectivement par

$$x_1^n, \quad x_1^{n-1}x_2, \quad x_1^{n-2}x_2^2, \cdots x_2^n.$$

L'hypersurface (L_{n-1}) renferme les espaces linéaires (A_p), qui ont pour « coordonnées » $\alpha_{p,1}\ \alpha_{p,2} \cdots \alpha_{p,n+1}$. Parmi les espaces (P) qui la constituent, il en est n, et n seulement, qui ont, avec la courbe normale Γ_{2n-1}, n points coïncidents communs; ces points marquent sur cette courbe les images des racines de la forme binaire d'ordre n que nous venons de signaler.

Remplaçons, dans la formule (6), les coordonnées α des n points quelconques de l'espace E_n par les paramètres λ_i des n points que l'espace L_{n-1} a, en commun, avec C_n; nous aurons l'équation suivante, aussi générale que l'équation (6)

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_{n+1} \\ \lambda_1^n & \frac{n}{1}\lambda_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ \lambda_2^n & \frac{n}{1}\lambda_2^{n-1} & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n^n & \frac{n}{1}\lambda_n^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Celle-ci n'est autre que l'équation (5), si l'on tient compte de la signification des variables ζ.

Nous mettrons cette équation sous une forme plus simple en considérant les quantités λ_i comme étant les racines d'une forme binaire

$$f \equiv a_1 x_1^n + \frac{n}{1} a_2 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_{n+1} x_2^n ;$$

nous obtiendrons ainsi

$$a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 + \cdots + a_n\zeta_n + a_{n+1}\zeta_{n+1} = 0.$$

L'espace L_{n-1} est, par rapport à la courbe C_n, l'espace polaire du point dont les coordonnées satisfont aux relations

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \cdots : \zeta_{n+1} = a_{n+1} : -\binom{n}{1} a_n : \binom{n}{2} a_{n-1} : \cdots : \pm a_1. \quad (7)$$

De même, l'hypersurface (L_{n-1}) est l'*espace polaire* de l'espace linéaire à $n-1$ dimensions défini par les formules (7), relativement à la variété constituée par les espaces linéaires à $n-1$ dimensions qui sont tangents en n points coïncidents à la courbe normale Γ_{2n-1}, variété qui a pour équations paramétriques :

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \cdots \zeta_{n+1} = \lambda^n : \binom{n}{1}\lambda^{n-1} : \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \ldots : 1.$$

Si $n = 3$, cette dernière variété est la développable circonscrite à une cubique gauche.

Quelques-uns des points d'intersection de la courbe normale C_n et de l'espace L_{n-1} peuvent coïncider; alors (L_{n-1}) aura le même nombre d'espaces $\mathcal{E}_{n-1}$ générateurs, tangents multiples à Γ_{2n-1}.

— Par un point de l'espace E_{2n-1}, on ne peut mener à Γ_{2n-1} qu'un seul espace linéaire $\mathcal{E}_{n-1}$ rencontrant cette courbe en n points. Car les coordonnées de ce point, substituées aux variables dans les équations

$$z_i - z_{i+1}\Sigma\lambda_1 + z_{i+2}\Sigma\lambda_1\lambda_2 - \cdots \pm z_{i+n}\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

fournissent n équations définissant un seul groupe de valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

Cependant, lorsque ce point est pris sur la courbe, on peut mener une infinité d'ordre $n - 1$ d'espaces analogues.

Si λ_1 est le paramètre d'un tel point, on aura le lieu de ces espaces linéaires en éliminant les paramètres restants $\lambda_2 \dots \lambda_n$ entre les équations précédentes. Celles-ci, étant écrites ainsi

$$\begin{gathered}(z_i - z_{i+1}\lambda_1) - \Sigma\lambda_2(z_{i+1} - z_{i+2}\lambda_1) + \cdots \\ \mp(\lambda_2\lambda_3 \cdots \lambda_n)(z_{i+n-1} - z_{i+n}\lambda_1) = 0, \quad (i = 1, 2 \cdots n) \qquad (8)\end{gathered}$$

on obtient pour l'équation cherchée

$$\begin{vmatrix} z_1 - z_2\lambda_1 & z_2 - z_3\lambda_1 \cdots & z_n - z_{n+1}\lambda_1 \\ z_2 - z_3\lambda_1 & z_3 - z_4\lambda_1 \cdots & z_{n+1} - z_{n+2}\lambda_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n - z_{n+1}\lambda_1 & z_{n+1} - z_{n+2}\lambda_1 \cdots & z_{2n-1} - z_{2n}\lambda_1 \end{vmatrix} = 0$$

Au moyen de nos conventions, elle s'écrit

$$Z_1 - \lambda_1 Z_2 + \lambda_1^2 Z_3 - \cdots \pm \lambda_1^n Z_{n+1} = 0;$$

et l'on voit qu'elle rentre dans l'équation

$$\zeta_1 - \lambda_1\zeta_2 + \lambda_1^2\zeta_3 - \cdots \pm \lambda_1^n\zeta_{n+1} = 0,$$

qui peut représenter aussi un espace linéaire à $n - 1$ dimensions ayant un contact du n^e ordre avec la courbe normale de l'espace à n dimensions, E_n. Cet espace linéaire a donc pour similaire, dans l'espace E_{2n-1}, l'ensemble des espaces linéaires qui correspondent aux équations (8) et qui constituent un « cône ».

En particulier, le plan osculateur à une cubique gauche a pour similaire, dans l'espace à cinq dimensions, une gerbe de plans trisécants à la courbe Γ_5, ayant son sommet au point de celle-ci qui correspond au point d'osculation.

— Par k points ($1 < k < n$) pris sur la courbe Γ_{2n-1}, passe une infinité d'ordre $n - k$ d'espaces $\mathcal{E}_{n-1}$, ayant avec cette courbe n points communs. Le lieu de ces espaces, ainsi qu'il est aisé de le voir, ne peut s'exprimer analytiquement que par un ensemble d'équations en $Z_1, Z_2, \dots Z_{n+1}$.

6. — L'hypersurface (L_{n-1}), représentée par l'équation

$$a_1Z_1 + a_2Z_2 + \cdots + a_{n+1}Z_{n+1} = 0.$$

mérite une étude plus approfondie; elle remplit, dans la géométrie à $2n-1$ dimensions, le rôle similaire du rôle joué par l'espace linéaire à $n-1$ dimensions dans l'espace E_n.

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{n+1} \\ z_2 & z_3 & z_4 & \cdots & z_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z_{n+1} & z_{n+2} & \cdots & z_{2n} \\ a_{n+1} & -a_n & a_{n-1} & \cdots & \pm a_1 \end{vmatrix} = 0;$$

et, sous cette forme, on voit qu'elle résulte de l'élimination des n paramètres λ_i entre les n équations

$$z_i - z_{i+1}\Sigma\lambda_1 + z_{i+2}\Sigma\lambda_1\lambda_2 - \cdots \pm z_{i+n}\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots n) \qquad (9)$$

et la relation

$$a_1\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n + a_2\Sigma\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} + \cdots + a_n\Sigma\lambda_1 + a_{n+1} = 0,$$

qui représente une involution d'ordre n et de rang $n-1$, I^n_{n-1}.

Ainsi, *les espaces linéaires* $\mathcal{E}_{n-1}$ *qui répondent aux équations* (9) *et qui engendrent l'hypersurface* (L_{n-1}) *marquent, sur la courbe* Γ_{2n-1}, *par leurs points d'intersection avec celle-ci, les groupes d'une involution* I^n_{n-1}.

Parmi ces espaces $\mathcal{E}_{n-1}$, *il en est* n *et* n *seulement qui rencontrent la courbe en* n *points coïncidents* et ont ainsi avec la courbe un contact d'ordre n; car l'involution I^n_{n-1} possède n groupes seulement d'éléments multiples d'ordre n.

Quand n est impair, le groupe formé par les éléments multiples d'ordre n est un groupe de n éléments simples de l'involution ; il en résulte que, n *étant impair, l'espace linéaire* $\mathcal{E}_{n-1}$ *qui*

joint les points de contact d'ordre n *considérés ci-dessus est un espace générateur de l'hypersurface* (L_{n-1}).

Ce dernier théorème est similaire de la propriété connue : dans l'espace E_n, à un nombre impair de dimensions, l'espace linéaire d'ordre $n-1$, polaire d'un point P par rapport à la courbe normale C_n, renferme le pôle P.

L'espace L_{n-1} est déterminé par n points de l'espace E_n. Donc, *l'hypersurface* (L_{n-1}) *est déterminée quand on connaît* n *de ses espaces* $\mathcal{E}_{n-1}$ *générateurs ;* d'ailleurs, l'involution I^n_{n-1} est définie aussi par n groupes de n éléments.

7. — Le raisonnement suivant montre que l'hypersurface (L_{n-1}) jouit d'un second mode de génération au moyen d'espaces $\mathcal{E}_{n-1}$ et, de plus, qu'elle est déterminée lorsque l'on se donne les n points multiples d'ordre n de l'involution I^n_{n-1}.

Les équations

$$(z_i\lambda_k) \equiv z_i - \binom{n}{1} z_{i+1}\lambda_k + \binom{n}{2} z_{i+2}\lambda_k^2 - \cdots \pm z_{i+n}\lambda_k^n = 0,$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

définissent n espaces linéaires à $2(n-1)$ dimensions, ayant en commun un espace linéaire à $n-1$ dimensions qui a, avec Γ_{2n-1}, un contact d'ordre n au point de paramètre λ_k.

Considérons les n espaces linéaires répondant aux équations

$$(z_1\lambda_k) - (z_2\lambda_k)\Sigma m_1 + (z_3\lambda_k)\Sigma m_1 m_2 + \cdots \pm (z_n\lambda_k) m_1 m_2 \cdots m_{n-1} = 0,$$
$$(k = 1, 2, \cdots n) \qquad (10)$$

dans lesquelles $\Sigma m_1, \Sigma m_1 m_2 \ldots$ ont une signification bien connue.

Ces espaces renferment respectivement les espaces linéaires qui ont un contact d'ordre n aux points de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ de Γ_{2n-1} Ils ont en outre, en commun, un espace linéaire $\mathcal{E}_{n-1}$, à $n-1$ dimensions, dont nous rechercherons le lieu.

Si, dans les relations (10), on met en facteur $z_1, z_2, \ldots z_{2n}$, on verra, par la forme des résultats, que les espaces considérés rencontrent Γ_{2n-1} aux points de paramètres $m_1, m_2, \ldots m_{n-1}$; leur espace linéaire commun passe évidemment par ces $n-1$ points.

En éliminant les quantités m_i entre ces relations, il vient pour l'équation du lieu

$$\begin{vmatrix} (z_1\lambda_1) & (z_2\lambda_1) \cdots (z_n\lambda_1) \\ (z_1\lambda_2) & (z_2\lambda_2) \cdots (z_n\lambda_2) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (z_1\lambda_n) & (z_2\lambda_n) \cdots (z_n\lambda_n) \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

Ce déterminant est le produit des matrices

$$\begin{Vmatrix} z_1 & z_2 & \cdot \cdot z_{n+1} \\ z_2 & z_3 & \cdots z_{n+2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ z_n & z_{n+1} \cdots z_{2n} \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & -\binom{n}{1}\lambda_1 & \binom{n}{2}\lambda_1^2 \cdots \pm \lambda_1^n \\ 1 & -\binom{n}{1}\lambda_2 & \binom{n}{2}\lambda_2^2 \cdots \pm \lambda_2^n \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 1 & -\binom{n}{1}\lambda_n & \binom{n}{2}\lambda_n^2 \quad \pm \lambda_n^n \end{Vmatrix};$$

et, abstraction faite du déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 1 & \lambda_n \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

commun à tous les termes du développement, il peut s'écrire ainsi

$$Z_1 - \frac{1}{n} Z_2 \Sigma\lambda_1 + \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} Z_3 \Sigma\lambda_1\lambda_2 - \cdots \pm Z_{n+1}\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = 0,$$

les Z ayant une signification connue.

Si, maintenant, les quantités λ_i sont racines de la forme binaire d'ordre n

$$f \equiv a_1 x_1^n + \frac{n}{1} a_2 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_{n+1} x_2^n,$$

l'équation précédente s'exprime par

$$a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \cdots + a_{n+1} Z_{n+1} = 0.$$

C'est l'équation, rencontrée plus haut, de l'hypersurface (L_{n-1}).

Ainsi, l'*hypersurface* (L_{n-1}) *possède deux modes de génération au moyen d'espaces linéaires* $\mathcal{E}_{n-1}$ *à* n — 1 *dimensions. Les espaces générateurs du premier mode rencontrent* Γ_{2n-1} *en* n *points et marquent, par ces points, les groupes d'une involution* I_{n-1}^n; *les espaces générateurs du second mode ne rencontrent* Γ_{2n-1} *qu'en* n — 1 *points seulement.*

L'espace $\mathcal{E}_{n-1}$ qui joint, sur Γ_{2n-1}, les points dont les paramètres sont racines de $f = 0$, appartient au premier mode si n est impair; il ne se trouve pas sur l'hypersurface si n est pair.

Nous appellerons cet espace, *espace fondamental* de l'hypersurface (L_{n-1}).

L'hypersurface (L_{n-1}) généralise, dans l'espace E_{2n-1}, un résultat bien connu relatif à l'espace à trois dimensions, savoir : un hyperboloïde inscrit à une cubique gauche a comme génératrices d'un système des bisécantes de la courbe et comme génératrices de l'autre système des droites qui rencontrent cette courbe en un seul point : les bisécantes considérées figurent, par leurs appuis sur la cubique, les couples d'une involution quadratique; les éléments doubles de celle-ci sont marqués par deux droites du premier mode, tangentes à la courbe; la bisécante joignant ces éléments n'est pas génératrice de l'hyperboloïde.

8. — *Deux espaces linéaires générateurs du premier mode de* (L_{n-1}), *qui ont en commun un espace linéaire d'ordre* n — 2

rencontrant la courbe Γ_{2n-1} *en* n — 1 *points, doivent nécessairement se confondre.* Car, à un groupe donné de n — 1 éléments ne correspond qu'un seul élément dans l'involution I^n_{n-1}.

Cependant, lorsque les n — 1 points définissent un groupe neutre de I^n_{n-1}, tous les espaces générateurs du premier mode, qui passent par ces points, sont distincts entre eux; ils constituent des *espaces singuliers* $\mathcal{E}_{n-1}$ de l'hypersurface (L_{n-1}).

Par n — 1 points, pris arbitrairement sur Γ_{2n-1}, passe un espace générateur de chaque mode. Donc, généralement, *deux espaces générateurs de modes différents se coupent suivant un espace linéaire à* n — 2 *dimensions; ils sont renfermés dans un espace à* n *dimensions.*

On pourrait démontrer aussi que *deux espaces générateurs du premier mode (sauf les espaces singuliers) ne peuvent se rencontrer selon un espace linéaire à* n — 2 *dimensions;*

Que *deux espaces générateurs du premier mode ne peuvent avoir aucun point commun en dehors de la ligne* Γ_{2n-1}. Cette dernière proposition renferme la précédente.

9. — Appliquons les résultats ci-dessus à l'espace à trois dimensions E_3 et à l'espace correspondant à cinq dimensions E_5.

Tout plan P de l'espace E_3 a pour similaire une hypersurface (P) de l'espace E_5 dont l'équation est du troisième degré par rapport aux variables $z_1, z_2 \ldots z_6$. Cette hypersurface est engendrée par un ensemble de plans trisécants à la courbe normale Γ_5 de l'espace E_5; chacun de ces plans est le similaire d'un point du plan P.

Les trois points où P rencontre la cubique gauche C_3 de l'espace E_3 ont pour similaires trois plans osculateurs à Γ_5, les seuls que possède (P). Le pôle du plan P, par rapport à C_3, a pour similaire le plan unissant les points de contact des plans osculateurs; ce dernier plan est sur P; c'est son plan fondamental.

Chacun des plans trisécants marque sur Γ_5 l'image d'un terme d'une involution I^3_2; les points triples de l'involution sont les points d'intersection du plan fondamental et de Γ_5.

Deux plans trisécants générateurs, qui passent par une même

bisécante de Γ_3, se confondent. Il existe une infinité de plans trisécants singuliers formant faisceau ; ils passent par deux points de Γ_3 ; ces deux points sont les contacts de deux plans osculateurs à Γ_3, similaires des points de la cubique gauche où s'appuie la bisécante que l'on peut mener à la courbe par le pôle du plan P (*).

Deux plans trisécants générateurs n'ont en commun aucun point, à moins que ce ne soit sur Γ_3.

L'hypersurface (P) possède un second mode de génération au moyen de plans ; ces nouveaux plans ne rencontrent Γ_3 qu'en deux points seulement.

Tout plan P de l'espace E_3 rencontre $\mathcal{C}_3$ en un ou en trois points réels ; donc le plan fondamental de (P) coupe Γ_3 en un ou en trois points réels ; dans le premier cas seulement, les plans singuliers de (P) sont trisécants ; dans le second cas, ils n'ont qu'un point commun avec Γ_3 (*).

10. — D'après ce qui précède, il est évident que tout problème proposé dans l'espace à n dimensions sur des points et des espaces linéaires à $n-1$ dimensions a son similaire dans l'espace à $2n-1$ dimensions sur des espaces linéaires à $n-1$ dimensions et des hypersurfaces analogues à (L_{n-1}).

Un ensemble de p espaces linéaires L_{n-1} définit, dans l'espace E_n, un espace linéaire L_{n-p} à $n-p$ dimensions, constitué par la totalité des points communs aux p espaces considérés. La variété similaire est formée par l'ensemble des espaces linéaires $\mathcal{E}_{n-1}$ communs à p hypersurfaces (L_{n-1}). Les problèmes descriptifs que l'on pourra se proposer sur les espaces L_{n-p} auront donc leurs similaires relativement aux variétés (L_{n-p}).

Lorsque l'on donne, dans l'espace E_n, des points au nombre de $n-p+1$, ils suffisent pour déterminer l'espace linéaire L_{n-p},

---

(*) Voir à ce sujet notre travail : *Sur la représentation géométrique dans l'espace des formes quadratiques et cubiques binaires.* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 3e série, t. V.)

à $n - p$ dimensions, qui les unit. Si les coordonnées de ces points sont

$$z_{i,1}, z_{i,2}, \cdots z_{i,n+1}, \qquad (i = 1, 2, \cdots n - p + 1)$$

les équations paramétriques de l'espace L_{n-p} sont données par les expressions

$$z_k = m_1 z_{1,k} + m_2 z_{2,k} + \cdots + m_{n-p+1} z_{n-p+1,k}. \qquad (k = 1, 2, \cdots n + 1)$$

Par conséquent, la variété (L_{n-p}) de l'espace à $2n - 1$ dimensions, similaire de L_{n-p}, est déterminée par la connaissance de $(n - p + 1)$ espaces linéaires à $n - 1$ dimensions. Son étude peut, partiellement du moins, se faire au moyen des équations paramétriques précédentes, où les z seraient remplacés par Z.

11. — Ainsi, la droite D de l'espace euclidien et l'ensemble (D) des plans définis par les deux équations

$$\begin{aligned} a_{11}\zeta_1 + a_{21}\zeta_2 + a_{31}\zeta_3 + a_{41}\zeta_4 &= 0, \\ a_{12}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + a_{32}\zeta_3 + a_{42}\zeta_4 &= 0, \end{aligned} \qquad (12)$$

sont similaires. Ces plans sont trisécants à Γ_3 et, en général, ils ne se rencontrent pas n'étant pas renfermés dans un même espace linéaire à trois dimensions.

Quand D est une bisécante de la cubique gauche C_3, deux de ces plans sont osculateurs à Γ_3. Et puisque, par un point de l'espace, il passe une seule bisécante de C_3, par un plan donné dans E_3 passe une seule variété linéaire (D) ayant deux de ses plans osculateurs à Γ_3.

Les notions de parallélisme, perpendicularité, etc., de deux plans définissant une droite D pourraient être étendues à deux hypersurfaces définissant la variété (D), et interprétées. La théorie des polygones plans ou gauches donnerait naissance, de son côté, à des propriétés d'ensembles similaires d'hypersurfaces (P).

Les formules

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= m_1\zeta_{11} + m_2\zeta_{12},\\ \zeta_2 &= m_1\zeta_{21} + m_2\zeta_{22},\\ \zeta_3 &= m_1\zeta_{31} + m_2\zeta_{32},\\ \zeta_4 &= m_1\zeta_{41} + m_2\zeta_{42},\end{aligned} \qquad (13)$$

déterminent une droite D par les coordonnées de deux de ses points et les valeurs du paramètre $\frac{m_1}{m_2}$; elles déterminent aussi une variété (D) par deux de ses plans. Au moyen de ces expressions, certaines propriétés métriques d'une ponctuelle de l'espace pourraient être étendues aux variétés (D), ces propriétés étant convenablement interprétées.

Entre autre, quatre plans d'une variété (D) peuvent être dits former un groupe harmonique, quand on a

$$(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) = -1,$$

les lettres μ représentant des expressions analogues à $\frac{m_1}{m_2}$ ci-dessus.

— Posons

$$\rho q_{ik} \equiv \begin{vmatrix} a_{i,1} & a_{k,1} \\ a_{i,2} & a_{k,2} \end{vmatrix}; \qquad \rho' p_{ik} \equiv \begin{vmatrix} \zeta_{i,1} & \zeta_{k,1} \\ \zeta_{i,2} & \zeta_{k,2} \end{vmatrix},$$

les quantités ρ et ρ' étant des facteurs de proportionnalité. Ces formules pourront servir à déterminer la droite D et la variété similaire (D) définies par les équations (12) ou (13). Elles permettent de dire que *la géométrie réglée a sa similaire dans l'espace* E_5.

Si l'on a, par exemple, six quantités $r_{i,k}$ telles que la relation

$$r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23} = 0$$

soit satisfaite, ces six quantités définissent dans l'espace E_3 ou dans l'espace E_5 une droite D ou une variété (D). En outre, la condition

$$r_{12}r'_{34} + r_{13}r'_{42} + r_{14}r'_{23} + r_{34}r'_{12} + r_{42}r'_{13} + r_{23}r'_{14} = 0$$

marque simultanément que deux droites D et D′ ont un point

commun ou que deux variétés (D) et (D′) ont un plan, trisécant à Γ_3, commun.

Le parallèle entre D et (D) pourrait être étendu fort loin.

— Les bisécantes génératrices d'un hyperboloïde S, inscrit à $\mathcal{C}_3$, marquent, par leurs appuis sur celle-ci, une involution I_4^2; si l'on considère les variétés correspondant à ces bisécantes, on observe que les points de contact des plans osculateurs à Γ_3, contenus dans chacune d'elles, représentent sur la courbe Γ_3 les couples de cette même involution. En outre, ces variétés engendrent une hypersurface (S) similaire de l'hyperboloïde. Cette hypersurface a une équation du second ordre par rapport aux coordonnées Z et du sixième par rapport aux coordonnées ordinaires $z_1, z_2, \ldots z_6$. Et, de même que l'hyperboloïde possède deux modes de génération rectiligne, de même l'hypersurface (S) peut être engendrée de deux façons au moyen de variétés (D).

12. — L'étude des figures similaires formées par les groupes d'espaces linéaires L_{n-1} de E_n et par les groupes analogues de variétés (L_{n-1}) conduit à une extension du mode de représentation des involutions sur les courbes normales des espaces d'ordre supérieur dû à François Deruyts (*).

— L'involution I_p^n, d'ordre n et de rang p, est constituée par l'ensemble des groupes de n éléments communs à $n - p$ involutions d'ordre n et de rang $n - 1$. Elle a comme expression analytique un système de $n - p$ équations symboliques de la forme

$$a_{x_1} a_{x_2} \ldots a_{x_n} = 0.$$

La représentation de ces éléments par des points de la courbe normale $\mathcal{C}_n$ s'obtient au moyen de la considération de l'espace principal de l'involution I_p^n; celui-ci est défini, comme on sait, par l'ensemble des pôles des espaces linéaires à $n - 1$ dimen-

(*) F. Deruyts, *Mémoire sur la théorie de l'Involution et de l'Homographie unicursale.* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 2e série, t. XVII.)

sions correspondant séparément à chacune des involutions I^n_{n-1}.

Tout espace linéaire L_{n-1} à $n-1$ dimensions, qui passe par l'espace principal, marque sur C_n un groupe de n points de l'involution I^n_p. Et, pour construire un groupe de n points de cette involution connaissant p éléments de ce groupe, il suffit de mener l'espace linéaire déterminé par les $(n-p)$ pôles et les p points donnés de C_n.

Les figures similaires des précédentes donnent donc, sur la courbe Γ_{2n-1} de l'espace à $2n-1$ dimensions, la représentation des involutions d'ordre n.

Ainsi, dans l'espace euclidien, trois plans P_1, P_2, P_3 déterminent un point A, point principal d'une involution I^3_2 définie par les trois groupes de points que marquent, sur C_3, les plans donnés. La figure similaire dans E_3 est le plan (A), commun aux trois hypersurfaces (P_1), (P_2), (P_3). Et, de même que tout plan P, passant par A, donne sur C_3 un terne de I^3_2, toute hypersurface (P), passant par (A), détermine sur Γ_3, par son plan fondamental, le terne similaire. Il existe, passant par A, trois plans osculateurs à C_3; il y a donc trois hypersurfaces (P) seulement dont les plans fondamentaux sont osculateurs à Γ_3 ; et les points d'osculation marquent, sur cette courbe, les points triples de I^3_2.

Les pôles de deux plans P'_1, P'_2 déterminent, par leur jonction, une droite D, espace principal de l'involution I^1_1 constituée par les ternes communs aux involutions I^3_2 ayant pour points centraux les pôles considérés. Tout plan π, passant par cette droite, marque sur C_3 un terne de cette involution I^3_1; parmi ces ternes, il y en a quatre seulement composés d'un élément double et d'un élément simple.

Par « similarité » nous avons : Les plans fondamentaux des deux hypersurfaces (P'_1), (P'_2) définissent une variété (D) constituée par l'ensemble des plans communs aux variétés (P'_1), (P'_2); toute hypersurface (π), de même nature que (P'_1) et (P'_2), qui passe par (D), marque sur Γ_3, par son plan fondamental, un terne d'une involution I^3_1; parmi ces hypersurfaces (π), il y en a quatre seulement dont les plans fondamentaux sont tangents à Γ_3.

— Soient

$$a^n_{1,x} \equiv a_{11}x_1^n + \frac{n}{1}a_{12}x_1^{n-1}x_2 + \cdots + a_{1,n+1}x_2^n = \qquad (14)$$
$$a^n_{2,x} = 0, \quad a^n_{3,x} = 0, \ldots a^n_{p,x} = 0,$$

p formes binaires égalées à zéro, dont les racines sont les paramètres de p groupes de n points de la courbe normale $\mathcal{C}_n$. Ces p groupes déterminent une involution d'ordre n et de rang $p-1$, I^n_{p-1}.

Tous les groupes de cette involution sont les racines du faisceau de formes

$$k_1(a^n_{1,x}) + k_2(a^n_{2,x}) + \cdots + k_p(a^n_{p,x}) = 0.$$

Cette nouvelle définition analytique de l'involution I^n_{p-1} donne lieu à une autre représentation géométrique des groupes de cette involution.

Le faisceau L'_{n-1}, d'espaces linéaires à $n-1$ dimensions, qui a pour équation

$$k_1(a_1\mathfrak{Z}) + k_2(a_2\mathfrak{Z}) + \cdots + k_p(a_p\mathfrak{Z}) = 0, \qquad (15)$$

passe par l'espace linéaire commun aux espaces linéaires l_i dont les équations sont

$$(a_i\mathfrak{Z}) \equiv a_{i,1}z_1 + a_{i,2}z_2 + \cdots + a_{i,n+1}z_{n+1} = 0.$$

Ces dernières, dérivant des formes (14) par la substitution

$$x_1^n : \binom{n}{1}x_1^{n-1}x_2 : \binom{n}{2}x_1^{n-2}x_2^2 : \ldots x_2^n = z_1 : z_2 : z_3 : \ldots : z_{n+1},$$

les espaces linéaires l_i qu'elles représentent rencontrent $\mathcal{C}_n$ en n points, images des racines de ces formes.

La figure similaire du faisceau L'_{n-1}, dont l'équation serait la formule (15) où $z \equiv \mathrm{Z}$, est constituée par un ensemble (L'_{n-1}) d'hypersurfaces (L_{n-1}) qui jouissent séparément des propriétés rencontrées ci-dessus et passent par les espaces à $n-1$ dimen-

sions possédant, en commun, les variétés définies par les équations

$$a_{i,1}Z_1 + a_{i,2}Z_2 + \cdots + a_{i,n+1}Z_{n+1} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

Ces variétés (L'_{n-1}) marquent, par leur espace fondamental, sur la courbe Γ_{2n-1}, les groupes de l'involution I^n_{p-1}.

On voit donc que l'on pourra, par le secours des éléments géométriques similaires des espaces à n et à $2n - 1$ dimensions, figurer sur la courbe normale de ce dernier espace les diverses involutions d'ordre n et de rang $p - 1$, avec leurs singularités, quelle que soit la définition analytique de ces involutions.

La représentation de l'involution quadratique sur une conique, par les intersections de cette courbe avec les éléments d'un faisceau de droites, et l'extension de cette représentation à l'espace euclidien où les couples de cette involution sont donnés par les génératrices, bisécantes d'une cubique gauche, d'un hyperboloïde inscrit, se trouvent donc généralisées pour les involutions I^n_p *dans les espaces à* n *et à* 2n — 1 *dimensions*. C'est ce qui résulte de la représentation de François Deruyts et de l'analogie, signalée ci-dessus au numéro 7, existant entre l'hyperboloïde et les hypersurfaces (L_{n-1}).

13. — La discussion des propriétés de la forme algébrique $f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{n+1})$, d'ordre p, au point de vue de la géométrie des figures similaires F et (F), peut se faire avec facilité.

Nous nous contenterons de dire quelques mots de l'hypersurface (Q), similaire de la quadrique Q. Cette hypersurface, de l'espace E_3, est représentée par une équation du sixième degré en $z_1, z_2 \ldots z_6$, du second degré en Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 ; elle a comme éléments générateurs des plans trisécants de Γ_3. Cependant, il est certaines hypersurfaces (Q) qui sont constituées par des ensembles de plans formant des variétés (D) — variétés définies au numéro 10. Dans ce cas, il existe d'ordinaire deux systèmes de variétés (D) engendrant (Q).

Énonçons quelques propriétés de (Q), dont le lecteur apercevra immédiatement les similaires dans la théorie de la quadrique :

Une hypersurface (Q) est déterminée par la connaissance de neuf de ses plans générateurs.

Elle possède, en général, six plans générateurs osculateurs à Γ_3, et, lorsqu'elle renferme sept de ces plans, elle les renferme tous.

Par l'un des plans générateurs de (Q), on peut faire passer une simple infinité de variétés (D) ne possédant en commun avec (Q) que le plan générateur considéré ; le lieu de ces variétés (D) est une hypersurface (P) — définie au numéro 9 — « tangente » suivant le plan considéré à l'hypersurface (Q).

Par une variété (D) de l'espace E_3, on peut faire passer deux hypersurfaces (P), tangentes à (Q), à moins que (Q) ne soit engendrée par un ensemble de variétés (D).

Par un plan π de l'espace E_3, on peut faire passer une infinité d'hypersurfaces (P), tangentes à (Q) selon un plan générateur de celle-ci ; si (Q) est formée de variétés (D), il y a seulement deux hypersurfaces (P) contenant π qui sont alors tangentes suivant une variété (D). L'ensemble des plans de contact est situé sur une même hypersurface (P'), « polaire » du plan π par rapport à (Q). Toute variété (D), qui passe par π, rencontre l'hypersurface (Q) selon deux plans et l'hypersurface (P') selon un plan ; le plan π et ces trois plans forment un groupe harmonique.

A l'équation tangentielle de la quadique Q répond une « équation tangentielle » de (Q) ; les éléments tangentiels sont ici des hypersurfaces (P).

— Parmi les quadriques particulières intéressantes à considérer, signalons les surfaces réglées Q_1, Q_2, Q_3 ayant pour équations respectivement

$$\begin{aligned} 3z_1z_3 - z_2^2 &= 0, \\ 9z_1z_4 - z_2z_3 &= 0, \\ 3z_2z_4 - z_3^2 &= 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Deux quelconques de celles-ci représentent la cubique gauche C_3. Les similaires sont les hypersurfaces (Q_1), (Q_2), (Q_3), formées de variétés (D) et telles que deux d'entre elles ont en commun

l'ensemble des plans osculateurs à la courbe Γ_5 et l'ensemble des plans d'une « génératrice » (D).

Dans notre premier travail, nous avons signalé la correspondance entre le plan et l'espace définie par les expressions

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3,$$

dans lesquelles les ζ sont les coordonnées z_1, z_2, z_3 d'un point du plan ou les « coordonnées »

$$z_1 z_3 - z_2^2, \qquad z_1 z_4 - z_2 z_3, \qquad z_2 z_4 - z_3^2,$$

de la droite similaire de l'espace.

Si, dans ces dernières expressions, on remplace z_1 et z_4 par les quantités proportionnelles $3z_1$ et $3z_4$, on obtient les premiers membres des relations (16).

On aperçoit que les formules

$$(Z_1 Z_3 - Z_2^2) : (Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3) : (Z_2 Z_4 - Z_3^2) = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

permettraient de rapporter à un point du plan une variété (D) de l'espace E_3 ; cette variété est la « génératrice » commune à deux hypersurfaces analogues à (Q_1), (Q_2), (Q_3), qui passent encore par l'ensemble des plans osculateurs à Γ_5 dont on devrait faire abstraction ici.

Et ainsi *les propriétés des points d'un plan s'étendent à des variétés* (D) *de l'espace* E_3, *et les propriétés de la forme algébrique ternaire d'ordre* n *s'appliquent à l'étude de cet espace.*

Un exemple simple de cette nouvelle filiation d'idées a été signalé au numéro 11 du travail actuel entre un hyperboloïde S, inscrit à C_3, et la variété similaire (S) de l'espace E_5. Car on sait, par les résultats de notre premier mémoire, que l'hyperboloïde S est, à son tour, le similaire d'une droite du plan. Les variétés (D), engendrant (S) dans l'espace E_5, sont donc similaires des points d'une droite de la géométrie plane.

14. — Aux numéros 5 et 13 nous avons rencontré les noms

de polaires et de tangentes données à des hypersurfaces (L_{n-1}) de E_{2n-1} ou, dans l'espace E_5, a des hypersurfaces (P).

On pourrait voir avec facilité que les équations de ces figures se déduisent, ou bien des équations de la variété constituée par l'ensemble des espaces à $n - 1$ dimensions tangents en n points coïncidents à la courbe normale Γ_{2n-1}, ou bien de l'équation de l'hypersurface (Q) par des calculs effectués sur Z identiques à ceux que l'on a dû effectuer sur z, dans les équations de la courbe C_n ou de la quadrique Q, pour avoir les variétés similaires.

Ainsi se présentent des exemples de différentiation effectuées sur une forme $f(Z_1, Z_2, \ldots Z_{n+1})$, les quantités Z étant considérées comme des variables simples.

Dans les formules qui dépendent des variables Z, on pourra, en général, effectuer les mêmes calculs que sur les formules similaires en z. Si les premières font passer d'un espace linéaire générateur à $n - 1$ dimensions de l'espace E_{2n-1} à un autre, les secondes, de leur côté, conduisent d'un point de l'espace E_n à un autre.

SOMMATION

DE

SUITES TERMINÉES

PAR

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

MEMBRE DE L'INSTITUT DE FRANCE
CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE

SOMMATION

DE

SUITES TERMINÉES

---

1. L'une des manières les plus élégantes, sinon les plus fréquentes, d'appliquer l'intégration par parties à la recherche des quadratures consiste à faire en sorte que l'intégrale à laquelle on ramène la proposée la reproduise identiquement, avec tout autre coefficient que l'unité positive. On forme ainsi, par rapport à cette inconnue, une équation du premier degré qui la fournit immédiatement.

Imaginons que l'on réalise ce programme, non plus en vue d'obtenir une quadrature nouvelle, mais au contraire en partant d'une intégrale déjà connue, et même des plus élémentaires; et que l'on en substitue finalement la valeur dans l'équation ainsi constituée. Qu'obtiendrons-nous ainsi? Évidemment une identité; mais on sait qu'une identité n'est pas toujours à dédaigner, et peut parfois rendre d'utiles services.

Concevons par exemple que l'on réalise plusieurs fois de suite une telle marche, en s'y prenant successivement de façons variées suivant une loi déterminée, sur cette intégrale sans cesse régénérée. On réalisera ainsi la sommation d'une suite terminée; résultat moins répandu dans l'analyse, on le sait, que celle de séries illimitées.

Cet aperçu va se préciser dans les exemples suivants.

2. Envisageons en premier lieu la plus simple de toutes les intégrales

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

en considérant l'exposant m comme la différence de deux nombres

$$m = (q-1) - (p+1),$$

absolument quelconques : entiers, fractionnaires ou incommensurables, positifs ou négatifs (*). La relation précédente pourra s'écrire

$$(1) \qquad \frac{x^{q-p-1}}{q-p-1} = \int x^{q-1} \cdot x^{-p-1} dx,$$

et, sur ce produit de deux facteurs, nous appliquerons plusieurs fois de suite l'intégration par parties.

Il vient ainsi

$$(2) \int x^{q-1} \cdot x^{-p-1} dx = \frac{x^q}{q} \cdot x^{-p-1} + \frac{p+1}{q} \int x^q \cdot x^{-p-2} dx,$$

$$\int x^q \cdot x^{-p-2} dx = \frac{x^{q+1}}{q+1} \cdot x^{-p-2} + \frac{p+2}{q+1} \int x^{q+1} \cdot x^{-p-3} dx,$$

$$\int x^{q+1} \cdot x^{-p-3} dx = \frac{x^{q+2}}{q+2} \cdot x^{-p-3} + \frac{p+3}{q+2} \int x^{q+2} \cdot x^{-p-4} dx,$$

. . . . . .

et à la $(k+1)^e$ opération

$$(3) \int x^{q+k-1} \cdot x^{-p-k-1} = \frac{x^{q+k}}{q+k} \cdot x^{-p-k-1} + \frac{p+k+1}{q+k} \int x^{q+k} \cdot x^{-p-k} dx.$$

(*) Mais en excluant expressément l'hypothèse $q = p + 1$.

Substituons de proche en proche, depuis l'égalité (2) jusqu'à (3), les valeurs de ces intégrales, toujours identiques au fond à la proposée, et remplaçons-les définitivement, au commencement et à la fin, par leur valeur commune (1).

On voit que x^{q-p-1} se trouvera partout en facteur commun. Il ne saurait dès lors y avoir lieu d'ajouter une constante d'intégration C. En effet, tout le développement s'annulant pour $x = 0$ (*), nous serions forcés de prendre $C = 0$. Le symbole x disparaît ainsi de lui-même, et il ne nous reste plus qu'une identité entre les deux paramètres tout à fait quelconques p, q, et le nombre arbitraire k entier et positif

$$(4)\quad \frac{1}{q-p-1} = \frac{1}{q} + \frac{p+1}{q(q+1)} + \frac{(p+1)(p+2)}{q(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+k)}{q(q+1)\dots(q+k)}\left[1 + \frac{p+k+1}{q-p-1}\right].$$

Multiplions tous les termes par p, et faisons passer le dernier dans l'autre membre; nous obtiendrons finalement la somme de cette suite terminée

$$(5)\quad \frac{p}{q} + \frac{p(p+1)}{q(q+1)} + \frac{p(p+1)(p+2)}{q(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{p(p+1)\dots(p+k)}{q(q+1)\dots(q+k)} = \frac{p}{q-p-1}\left[1 - \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+k+1)}{q(q+1)\dots(q+k)}\right].$$

3. Je prendrai comme second exemple une intégrale non moins élémentaire, sous la forme

$$\frac{e^{(p+q)x}}{p+q} = \int e^{(p+q)x}dx = \int e^{(p+a_1)x}\,.\,e^{(q-a_1)x}dx.$$

Je désigne de nouveau par p et q deux quantités absolument quelconques. Quant au paramètre a_1, et ultérieurement a_2,

---

(*) Ou $x = \infty$, si l'exposant $q-p-1$ est négatif.

a_3, ..., a_k, ce sont des arbitraires que nous introduirons l'une après l'autre sans aucune loi nécessaire. Celle-ci reste *ad libitum*, permettant par là de constituer des applications très variées.

Il vient en intégrant par parties

$$\int e^{(p+a_1)x} \cdot e^{(q-a_1)x} dx =$$

$$\frac{e^{(p+a_1)x}}{p+a_1} \cdot e^{(q-a_1)x} - \frac{q-a_1}{p+a_1} \int e^{(p+a_1)x} \cdot e^{(q-a_1)x} dx,$$

ce qui nous ramène à une intégrale identique à la proposée. Reprenons-la sous une forme encore différente, pour la soumettre de nouveau à l'intégration par parties

$$\int e^{(p+a_1+a_2)x} \cdot e^{(q-a_1-a_2)x} dx =$$

$$\frac{e^{(p+a_1+a_2)x}}{p+a_1+a_2} \cdot e^{(q-a_1-a_2)x} - \frac{q-a_1-a_2}{p+a_1+a_2} \int e^{(p+a_1+a_2)x} \cdot e^{(q-a_1-a_2)x} dx,$$

ou encore une fois

$$\int e^{(p+a_1+a_2+a_3)x} \cdot e^{(q-a_1-a_2-a_3)x} dx = \frac{e^{(p+a_1+a_2+a_3)x}}{p+a_1+a_2+a_3} \cdot e^{(q-a_1-a_2-a_3)x}$$

$$- \frac{q-a_1-a_2-a_3}{p+a_1+a_2+a_3} \int e^{(p+a_1+a_2+a_3+a_4)x} \cdot e^{(q-a_1-a_2-a_3-a_4)x} dx,$$

et ainsi de suite.

Opérons k fois de cette manière, et substituons de proche en proche les expressions des intégrales successives. Nous ferons ainsi finalement apparaître partout leur valeur commune $\frac{e^{(p+q)x}}{p+q}$; et il n'y aura pas lieu d'ajouter de constante d'intégration, car elle devrait s'annuler, avec tout le reste du développement, pour l'hypothèse $x = \pm\infty$ suivant le signe de $p+q$.

L'exponentielle disparaît ainsi d'elle-même, et avec elle toute

trace du symbole d'intégration x. Il ne reste plus que la sommation de cette suite terminée très générale

$$\frac{1}{p+a_1}-\frac{q-a_1}{(p+a_1)(p+a_1+a_2)}+\frac{(q-a_1)(q-a_1-a_2)}{(p+a_1)(p+a_1+a_2)(p+a_1+a_2+a_3)}-\ldots$$

$$(6)\quad \ldots\pm\frac{(q-a_1)(q-a_1-a_2)\ldots(q-a_1-a_2-\ldots-a_{k-1})}{(p+a_1)(p+a_1+a_2)\ldots(p+a_1+a_2+\ldots+a_k)}$$

$$=\frac{1}{p+q}\left[1\pm\frac{(q-a_1)(q-a_1-a_2)\ldots(q-a_1-a_2+\ldots-a_k)}{(p+a_1)(p+a_1+a_2)\ldots(p+a_1+a_2+\ldots+a_k)}\right].$$

4. Supposons par exemple égales entre elles toutes les constantes a_k, il viendra

$$\frac{1}{p+a}-\frac{q-a}{(p+a)(p+2a)}+\frac{(q-a)(q-2a)}{(p+a)(p+2a)(p+3a)}-\ldots$$

$$(7)\quad \ldots\pm\frac{(q-a)(q-2a)(q-3a)\ldots[q-(k-1)a]}{(p+a)(p+2a)(p+3a)\ldots(p+ka)}$$

$$=\frac{1}{p+q}\left[1\pm\frac{(q-a)(q-2a)\ldots(q-ka)}{(p+a)(p+2a)\ldots(p+ka)}\right].$$

Faisons en second lieu

$$a_k=kb,$$

d'où, en introduisant le symbole t_k pour représenter les nombres triangulaires

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k=\frac{k(k+1)}{2}b=bt_k.$$

Nous obtiendrons par là cette nouvelle suite

$$\frac{1}{p+bt_1}-\frac{q-bt_1}{(p+bt_1)(p+bt_2)}+\frac{(q-bt_1)(q-bt_2)}{(p+bt_1)(p+bt_2)(p+bt_3)}-\ldots$$

$$(8)\quad \ldots\pm\frac{(q-bt_1)(q-bt_2)\ldots(q-bt_{k-1})}{(p+bt_1)(p+bt_2)\ldots(p+bt_k)}$$

$$=\frac{1}{p+q}\left[1\pm\frac{(q-bt_1)(q-bt_2)\ldots(q-bt_k)}{(p+bt_1)(p+bt_2)\ldots(p+bt_k)}\right].$$

De même que nous venons de passer des nombres naturels aux nombres triangulaires, nous passerions de ceux-ci aux nombres pyramidaux, et à des nombres figurés quelconques.

5. En introduisant l'hypothèse la plus simple : $a = 1$, et changeant en outre dans la relation (7) p en $q - 1$, en même temps que q en $-p$, on retrouve la formule (4), et comme conséquence (5).

Je ferai remarquer en passant que celle-ci rencontre, pour $k = \infty$, une vérification dans la sommation d'une série indéfinie donnée par Catalan à la page 40 de son *Traité élémentaire des séries*.

Si l'on change les signes de p et q, le développement (5) devient

$$(9)\quad \frac{p}{q}+\frac{p(p-1)}{q(q-1)}+\frac{p(p-1)(p-2)}{q(q-1)(q-2)}+\cdots+\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k)}{q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)} = \frac{p}{q-p-1}\left[1-\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k-1)}{q(q-1)\cdots(q-k)}\right].$$

Il donne également par le changement de signe de q seul

$$(10)\quad \frac{p}{q}-\frac{p(p+1)}{q(q-1)}+\frac{p(p+1)(p+2)}{q(q-1)(q-2)}-\cdots\pm\frac{p(p+1)\cdots(p+k)}{q(q-1)\cdots(q-k)} = \frac{p}{p+q+1}\left[1\pm\frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+k+1)}{q(q-1)\cdots(q-k)}\right],$$

et par celui de p seul

$$(11)\quad \frac{p}{q}-\frac{p(p-1)}{q(q+1)}+\frac{p(p-1)(p-2)}{q(q+1)(q+2)}-\cdots\pm\frac{p(p-1)\cdots(p-k)}{q(q+1)\cdots(q+k)} = \frac{p}{p+q-1}\left[1\pm\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k-1)}{q(q+1)\cdots(q+k)}\right].$$

Faisons $q = 1$ dans cette dernière égalité (11), nous obtiendrons

$$(12)\quad \frac{p}{1} - \frac{p(p-1)}{1.2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} - \ldots \pm \frac{p(p-1)\ldots(p-k)}{1.2.3\ldots(k+1)} = 1 \pm \frac{(p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-k-1)}{1.2.3.4\ldots k(k+1)},$$

c'est-à-dire la somme d'un nombre arbitraire des coefficients consécutifs de la série du binôme de Newton pris avec des signes alternatifs, expression qui a déjà été donnée par Janni dans le *Journal de Battaglini* de 1874. L'hypothèse $p = 1$ fournira de même avec la relation (10) la somme de leurs inverses avec des signes alternés

$$\frac{1}{q} - \frac{1.2}{q(q-1)} + \frac{1.2.3}{q(q-1)(q-2)} - \ldots \pm \frac{1.2.3\ldots(k+1)}{q(q-1)\ldots(q+k)} = \frac{1}{q+2}\left[1 \pm \frac{1.2.3\ldots(k+2)}{q(q-1)\ldots(q-k)}\right].$$

6. Les expressions (5, 9, 10, 11) peuvent se généraliser de la manière suivante.

Posons

$$p = \frac{M}{m}, \quad q = \frac{N}{n},$$

la formule (5) deviendra

$$(13)\quad \frac{M}{N}\cdot\frac{n}{m} + \frac{M(M+m)}{N(N+n)}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^2 + \ldots + \frac{M(M+m)\ldots(M+km)}{N(N+n)\ldots(N+kn)}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^k = \frac{mn}{Nm-Mn-mn}\left\{1 - \frac{(M+m)(M+2m)\ldots[M+(k+1)m]}{N(N+n)\ldots(N+kn)}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^{k+1}\right\}.$$

Actuellement opérons la transmutation réciproque de M et N, ainsi que de m et n

$$\frac{N}{M}\cdot\frac{m}{n} + \frac{N(N+n)}{M(M+m)}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{N(N+n)\ldots(N+kn)}{M(M+m)\ldots(M+km)}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^k = \frac{mn}{Mn-Nm-mn}\left\{1 - \frac{(N+n)(N+2n)\ldots[N+(k+1)n]}{m(M+m)\ldots(M+km)}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{k+1}\right\}.$$

Si nous représentons en abrégé ces deux suites par

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k,$$

$$T_k = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \cdots + \frac{1}{u_k},$$

nous pourrons écrire, en fonction du dernier terme u_k,

$$S_k = \frac{mn}{Nm - Mn - mn}\left[1 - \frac{M + (k+1)m}{M} \cdot \left(\frac{n}{m}\right) \cdot u_k\right],$$

$$T_k = \frac{mn}{Mn - Nm - mn}\left[1 - \frac{N + (k+1)n}{N} \cdot \left(\frac{m}{n}\right) \cdot \frac{1}{u_k}\right].$$

Éliminons enfin u_k entre ces deux égalités, il nous restera cette relation entre les deux sommes S et T :

$$(14) \qquad \left[\left(\frac{M}{m} + \frac{N}{n} + 1\right) S_k + 1\right]\left[\left(\frac{N}{n} - \frac{M}{m} + 1\right) T_k + 1\right] = \left[(k+1)\frac{m}{M} + 1\right]\left[(k+1)\frac{n}{N} + 1\right].$$

Il suffirait donc de posséder la somme d'une suite du type (13) pour déduire de l'identité (14) celle de la série formée par les inverses de ses différents termes.

On pourrait par exemple se servir de la formule de Janni (12) pour en déduire celle des inverses des coefficients du binôme avec signes alternés que nous avons tirée (n° 5) de l'égalité (10).

7. Nous pouvons parvenir à des développements d'un genre tout différent, privés de dénominateurs, en opérant de la manière suivante.

Faisons dans le développement (5) $q = 1$, et séparons-le en deux parties, en arrêtant la première au terme de rang $p - 2$. On remarquera qu'à partir de là, des facteurs se détruisent

consécutivement aux deux termes des fractions qui constituent le second groupe, ce qui permet d'écrire

$$\frac{p}{1}+\frac{p(p+1)}{1.2}+\frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}+\ldots+\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(2p-3)}{1.2.3.4\ldots(p-2)}$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}\left[\begin{array}{l}p(p+1)\ldots(2p-2)+(p+1)(p+2)\ldots(2p-1)+\ldots\\ \ldots+(k+2)(k+3)\ldots(k+p-1)(k+p)\end{array}\right]$$
$$=-1+\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+k+1)}{1.2.3.4\ldots(k+1)}.$$

Or la première portion peut être fournie directement par la même formule générale (5) pour les hypothèses : $q=1$, $k=p-3$, sous la forme

$$-1+\frac{(p+1)(p+2)\ldots(2p-2)}{1.2.3.4\ldots(p-2)}.$$

Dès lors la quantité placée entre les crochets se déduit de l'équation précédente de la manière suivante :

$$1.2.3\ldots(p-1)\left\{\left[-1+\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+k+1)}{1.2.3.4\ldots(k+1)}\right]\right.$$
$$\left.-\left[-1+\frac{(p-1)(p-2)\ldots(2p-2)}{1.2.3.4\ldots(p-2)}\right]\right\},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+k+1)}{p(p+1)(p+2)\ldots(k+1)}-(p-1).(p+1)(p+2)\ldots(2p-2).$$

Nous obtenons donc enfin

$$p(p+1)(p+2)\ldots(2p-2)+(p+1)(p+2)(p+3)\ldots(2p-1)+\ldots$$
$$\ldots+(k+2)(k+3)(k+4)\ldots(k+p-1)(k+p)$$
$$=\frac{1}{p}\left[(k+2)(k+3)(k+4)\ldots(k+p+1)-(p-1)p(p+1)\ldots(2p-2)\right].$$

SUR LES

VARIÉTÉS A TROIS DIMENSIONS

QUI REPRÉSENTENT

LES COUPLES DE POINTS

D'UNE COURBE ET D'UNE SURFACE ALGÉBRIQUES

PAR

Lucien GODEAUX

CANDIDAT EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

SUR LES

VARIÉTÉS A TROIS DIMENSIONS

QUI

REPRÉSENTENT LES COUPLES DE POINTS

D'UNE COURBE ET D'UNE SURFACE ALGÉBRIQUES

L'étude des surfaces algébriques qui représentent les couples de points d'une ou deux courbes algébriques a été faite il y a quelques années par trois géomètres italiens : MM. De Franchis (*), Maroni (**) et Severi (***). Dans un beau mémoire qui vient de paraître, M. Severi (iv) s'est occupé de la variété algé-

---

(*) *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due o di una curva algebrica.* (Rendiconti di Palermo, 1903, t. XVII.) — *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve.* (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 1° sem., 1903, (5), t. XII.)

(**) *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecanti.* (Atti della R. Accad. di Torino, 1903, t. XXXVIII.)

(***) *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica.* (Atti della R. Accad. di Torino, 1903, t. XXXVIII.) — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie.* (Memorie della R. Accad. di Torino, 1903 (2), t. LIV.)

(iv) *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti di Palermo, 1909, t. XXVIII.) — Un résumé de ce Mémoire avait été publié antérieurement sous le titre : *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche.* (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 2e sem., 1907, (5), t. XVI.)

brique à trois dimensions dont les points représentent sans exception les couples de points d'une courbe et d'une surface; le savant géomètre a construit le système canonique de cette variété par la considération des intégrales triples de première espèce. Dans la note suivante, je me propose de construire le système canonique en employant les méthodes algébrico-géométriques.

Dans la première de ses notes citées plus haut, M. De Franchis avait établi une relation entre les caractères virtuels d'une courbe appartenant à la surface algébrique qui représente les couples de points d'une ou de deux courbes algébriques. Des relations analogues existent naturellement entre les caractères virtuels des surfaces appartenant à la variété qui fait l'objet de ce travail, mais leur recherche est moins simple que dans le cas des surfaces. Nous recherchons ensuite les invariants de Zeuthen-Segre et de Pannelli.

1. — Désignons par V une variété algébrique à trois dimensions qui représente sans exception les couples de points d'une courbe C_0 de genre $p > 0$ et d'une surface F_0 privée de courbes exceptionnelles, de genre géométrique $p_g > 0$, de genre arithmétique p_a, d'invariant de Calstelnuovo-Enriques ω et d'invariant de Zeuthen-Segre i.

Les caractères de la variété V calculés par M. Severi sont : le genre géométrique $P_g = pp_g$, le genre arithmétique $P_a = (p-1)\,p_a + p$, les caractères du système canonique $\Omega_0 = 6(p-1)(\omega-1)$, $\Omega_1 = 9(p-1)(\omega-1) + 1$, $\Omega_2 = 3(p-1)(\omega-1) + 2(p-1)\,p_a + 2p - 3$, et l'irrégularité superficielle $q_2 = (p_g - p_a) + p$.

La variété V possède un faisceau $\{F\}$ birationnellement identique à C_0 de surfaces F identiques à F_0, et une congruence $\{\{C\}\}$ identique à F_0 formée par des courbes C identiques à C_0. Les surfaces F et les courbes C sont unisécantes.

Dans la suite de ce travail, nous désignerons par $|\Phi|$ le système canonique de V et par $|\Theta_0|$ le système canonique de F_0. Une surface de V formée par les courbes C qui correspondent aux

points d'une courbe Θ_0 sera désignée par Θ. On voit qu'une telle surface représente sans exception les couples de points de C_0 et d'une courbe Θ_0. De plus, nous utiliserons les notations suivantes, déjà employées par M. Severi : H, K, L étant trois surfaces de V, (H, K) désignera la courbe, intersection des surfaces H, K et [H, K] le genre de cette courbe, (H, K, L) le groupe de points et [H, K, L] le nombre de points communs aux trois surfaces H, K, L.

2. Considérons sur la surface F_0 un système linéaire $|\Gamma_0|$, ∞^3 au moins, simple, irréductible et dépourvu de points de base. Une surface Γ qui représente (sans exception) les couples de points de la courbe C_0 et d'une courbe Γ_0 appartient à un système linéaire ∞^3 au moins et dépourvu de points de base. On sait que la surface Γ possède deux faisceaux de courbes unisécantes, l'un formé de courbes C et l'autre de (ΓF), par conséquent le système canonique de cette surface se compose d'un groupe de C canonique pour le faisceau et d'un groupe de (ΓF), canonique pour le faisceau de ces courbes.

Si Γ_a est une surface qui représente (sans exception) les couples de points de C_0 et d'une courbe adjointe à $|\Gamma_0|$, la courbe $(\Gamma_a \Gamma)$ se compose de $2\pi - 2$ courbes C, π étant le genre de Γ_0. Donc, si $|\Gamma'|$ est le système adjoint à $|\Gamma|$, on a, sur la surface Γ,

$$(\Gamma\Gamma') \equiv (2p - 2)(\Gamma F) + (\Gamma\Gamma_a).$$

Par un théorème de M. Severi (*), on a

$$\Gamma' \equiv (2p - 2)F + \Gamma_a.$$

Mais d'autre part,

$$\Gamma' \equiv \Gamma + \Phi$$

(*) Severi, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà.* (Atti del R. Istituto Veneto di Sc., let. et arti., 1906, t. LXV.)

et, dans la congruence $\{\{C\}\}$,

$$\Gamma_a \equiv \Gamma + \Theta.$$

De ces trois formules on déduit

$$\Phi \equiv (2p - 2)F + \Theta. \qquad (1)$$

Une surface canonique de la variété V *s'obtient en réunissant à* $2p - 2$ *surfaces formant un groupe canonique du faisceau* $\{F\}$, *une surface engendrée par* ∞^1 *courbes* C *formant une variété canonique de la congruence* $\{\{C\}\}$.

Tel est le théorème établi par M. Severi dans son Mémoire sur les variétés, cité plus haut.

3. Remarquons que deux courbes de la congruence $\{\{C\}\}$ ne peuvent avoir aucun point commun, car on peut toujours former un faisceau irrationnel de courbes C. On en conclut en premier lieu que le degré virtuel du système $|\Gamma|$ est nul. En second lieu, deux surfaces Γ ont en commun m_0 courbes C, m_0 étant le degré virtuel de $|\Gamma_0|$, par conséquent

$$[\Gamma^2] = m_0(p - 1) + 1.$$

4. Considérons une correspondance $\mathcal{A}$ établie entre les points de la courbe C_0 et ceux de la surface F_0. A un point a de C_0 correspondent les points d'une courbe A_0 de F_0. Lorsque le point a décrit la courbe C_0, la courbe A_0 varie dans un système continu $\{A_0\}$ de degré virtuel m. Inversement, à un point de F_0 correspondent μ points de C_0. Nous dénoterons par π le genre de A_0. Les points de V qui représentent des couples de points correspondants de $\mathcal{A}$ sont situés sur une surface A de degré virtuel n_0, d'invariant de Castelnuovo-Enriques ω_0 et dont la courbe caractéristique a le genre p_0.

Chaque surface F rencontre la surface A suivant une courbe de genre π et chaque courbe C rencontre la même surface en μ points.

5. On a identiquement

$$[\Phi + A, \Phi, A] = [\Phi^2 A] + [\Phi A^2],$$

et

$$[(\Phi + A)^2, A] = [\Phi + A, \Phi, A] + [\Phi A^2] + [A^3],$$

d'où

$$[(\Phi + A)^2, A] = [\Phi^2 A] + 2[\Phi A^2] + [A^3]. \qquad (2)$$

Les surfaces $\Phi + A$ découpent sur A le système canonique, donc

$$[(\Phi + A)^2, A] = \omega_0 - 1. \qquad (3)$$

D'autre part

$$[\Phi A^2] = 2p_0 - 2 - 2n_0, \qquad [A^3] = n_0. \qquad (4)$$

La formule (1) donne successivement

$$\begin{aligned}
[\Phi^2 A] &= (2p - 2)[F\Phi A] + [\Theta\Phi A],\\
[F\Phi A] &= (2p - 2)[F^2 A] + [\Theta F A],\\
[\Theta\Phi A] &= (2p - 2)[\Theta F A] + [\Theta^2 A],\\
[\Phi^2 A] &= 2(2p - 2)[\Theta F A] + [\Theta^2 A].
\end{aligned}$$

Or

$$[\Theta^2 A] = \mu(\omega - 1), \quad [\Theta F A] = [A_0 \Theta_0] = 2\pi - 2 - m$$

Donc

$$[\Phi^2 A] = 2(2p - 2)(2\pi - 2 - m) + \mu(\omega - 1).$$

De la formule précédente et des formules (2), (3) et (4) on déduit

$$\omega_0 - 1 = 2(2p - 2)(2\pi - 2 - m) + 2(2p_0 - 2) - 3n_0 + \mu(\omega - 1). \quad (5)$$

On obtient ainsi une première liaison entre les caractères de la surface A.

6. De la formule (1) on déduit

$$(\Phi A) \equiv (2p-2)(FA) + (\Theta A),$$

ou

$$[\Phi A] = [(2p-2)F, A] + [\Theta A] + (2p-2)[AF\Theta] - 1.$$

D'autre part, on a identiquement

$$(\Phi + A, A) \equiv (\Phi, A) + (AA),$$

ou

$$\omega_0 = [\Phi A] + p_0 + [AA\Phi] - 1.$$

De là,

$$\omega_0 = [(2p-2)F, A] + [\Theta A] + p_0 + (2p-2)[AF\Theta] + [A^2\Phi] - 2. \quad (6)$$

On a

$$[(2p-2)F, A] = (2p-2)\pi - (2p-2) + 1,$$
$$[AF\Theta] = 2\pi - 2 - m, \quad [A^2\Phi] = 2p_0 - 2 - 2n_0.$$

Moyenant ces trois égalités, la formule (6) devient

$$\omega_0 = [\Theta A] + 3(2p-2)(\pi-1) - m(2p-2) + 3(p_0-1) - 2n_0. \quad (7)$$

Considérons la surface Θ qui représente les couples de points de C_0 et d'une courbe canonique Θ_0 de F_0. La correspondance $\mathfrak{A}$ définit, entre C_0 et Θ_0, une correspondance d'indices $(\mu, 2\pi - 2 - m)$. La courbe (ΘA) représente, sur cette surface Θ, les couples de points liés par cette correspondance, donc on a (*)

$$2[\Theta A] - 2 = [\Theta A^2] + 2(p-1)(2\pi - 2 - m) + 2\mu(\omega - 1).$$

En combinant les formules (5) et (7) avec cette dernière, on trouve

$$[\Theta A^2] = 2(p_0 - 1) - 2m(p-1) - 2n_0 - 1.$$

(*) De Franchis, *loc. cit.*

Si la surface A appartient à un système continu, ∞^1 au moins, on a $[\Theta A^2] \geqslant 0$, d'où

$$2(p_0 - 1) \geqslant 2m(p-1) + 2n_0 + 1.$$

7. Désignons par I_0 l'invariant de Zeuthen-Segre de la variété V. Les surfaces F sont toutes birationnellement identiques à F_0, par conséquent, aucune d'elles ne possède de singularités altérant les caractères invariants non communs à toutes ces surfaces. En appliquant une formule que j'ai établie récemment (*), on a

$$I_0 = 2(p-1)(i+4) + 6.$$

L'invariant de Pannelli, I_1, est donné par la formule (**)

$$48P_a - 54 = 2I_1 - I_0,$$

d'où, comme $P_a = (p-1)\,p_a + p$,

$$I_1 = (p-1)(24p_a + i + 28).$$

(*) *Sur l'invariant de Zeuthen-Segre.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, Classe des sciences, 1909.)

(**) PANNELLI, *Sopra un carattere di una varieta algebrica a tre dimensioni* (ATTI DEL IV CONGRESSO DEI MATEMATICI. Roma, 1908, t. II.)

ÉTUDE

SUR LA

TRANSFORMATION CRUCIALE

ÉTENDUE A L'ESPACE

PAR

Ch. FRANÇOIS

ÉTUDIANT A LIÉGE

ÉTUDE

SUR LA

TRANSFORMATION CRUCIALE

ÉTENDUE A L'ESPACE

I. — Transformation d'une surface.

1. Les transformations dans le plan que nous avons appelées cruciale et sous-cruciale (*), peuvent être étendues à l'espace.

A un point de vue M qui se projette sur les axes coordonnés en P, Q, R, faisons correspondre le plan PQR $\equiv \mu$. Lorsque M parcourt une surface S, le plan μ enveloppe une seconde surface que nous désignons par S_1 ; le point de contact de μ avec S_1 sera représenté par M_1. En appliquant la même transformation (M, μ) à S_1, on obtient une troisième surface S_2 ; S_2 conduit par le même procédé à une surface S_3 et ainsi de suite (**).

Inversement, à un plan donné μ qui coupe les axes en P, Q, R, on peut faire correspondre le point M_{-1} qui se projette sur

(*) Voir *Mathesis*, octobre 1909.

(**) Soient P', Q', R' les projections de M sur les plans coordonnés. On pourrait faire correspondre au point M le plan P'Q'R' $\equiv \mu'$. Mais les plans μ et μ' étant parallèles et leurs distances à l'origine étant dans le rapport constant 1 : 2, il n'y a pas lieu d'étudier la transformation (M, μ').

les axes en P, Q, R. Lorsque μ roule sur une surface donnée S, le point M_{-1} parcourt une surface S_{-1}. Celle-ci, étant soumise à la transformation (μ, M_{-1}), conduit à une surface S_{-2}, etc.

2. Supposons la surface S donnée par les équations paramétriques

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v);$$

et posons

$$\xi = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad \eta = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad \zeta = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix},$$

$$\lambda = x\xi + y\eta + z\zeta.$$

Si x, y, z sont les coordonnées de M et X, Y, Z les coordonnées courantes, l'équation de μ est

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 1. \tag{1}$$

Pour avoir l'enveloppe de μ, nous dérivons (1) successivement par rapport à chacun des paramètres u, v; ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} \frac{X}{x^2}x'_u + \frac{Y}{y^2}y'_u + \frac{Z}{z^2}z'_u = 0, \\ \frac{X}{x^2}x'_v + \frac{Y}{y^2}y'_v + \frac{Z}{z^2}z'_v = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Des équations (1) et (2), on tire pour les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 de M_1

$$X_1 = \frac{\xi x^2}{\lambda}, \quad Y_1 = \frac{\eta y^2}{\lambda}, \quad Z_1 = \frac{\zeta z^2}{\lambda}. \tag{3}$$

3. Le plan tangent au point M de la surface S ayant pour équation

$$\xi(X - x) + \eta(Y - y) + \zeta(Z - z) = 0,$$

les coordonnées X_{-1}, V_{-1}, Z_{-1} du point M_{-1} sont

$$X_{-1} = \frac{\lambda}{\xi}, \quad Y_{-1} = \frac{\lambda}{\eta}, \quad Z_{-1} = \frac{\lambda}{\zeta}. \tag{4}$$

Des formules (3) et (4) on tire

$$X_1 X_{-1} = x^2, \quad Y_1 Y_{-1} = y^2, \quad Z_1 Z_{-1} = z^2 \tag{5}$$

ou

$$\frac{X_1}{x} = \frac{x}{X_{-1}}, \quad \frac{Y_1}{y} = \frac{y}{Y_{-1}}, \quad \frac{Z_1}{z} = \frac{z}{Z_{-1}}.$$

Donc entre les transformées successives d'une même surface S par les transformations (M, μ), (μ, M_{-1}), on a les relations

$$\ldots \frac{X_3}{X_2} = \frac{X_2}{X_1} = \frac{X_1}{x} = \frac{x}{X_{-1}} = \frac{X_{-1}}{X_{-2}} = \ldots$$

On en conclut

$$X_n = \frac{\xi^n x^{n+1}}{\lambda^n}, \quad Y_n = \frac{\eta^n y^{n+1}}{\lambda^n}, \quad Z_n = \frac{\zeta^n z^{n+1}}{\lambda^n};$$

$$X_{-n} = \frac{\lambda^n}{x^{n-1}\xi^n}, \quad Y_{-n} = \frac{\lambda^n}{y^{n-1}\eta^n}, \quad Z_{-n} = \frac{\lambda^n}{z^{n-1}\zeta^n}.$$

4. Si la surface S est donnée par l'équation $F(x, y, z) = 0$, pour obtenir l'enveloppe du plan μ représenté par (1), on écrit que les équations

$$\frac{X dx}{x^2} + \frac{Y dy}{y^2} + \frac{Z dz}{z^2} = 0, \qquad F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0$$

sont identiques, ce qui donne

$$\frac{X}{x^2 F'_x} = \frac{Y}{y^2 F'_y} = \frac{Z}{z^2 F'_z}. \tag{6}$$

Résolvons les équations (1) et (6) par rapport à X, Y, Z ; les valeurs seront les coordonnées de M_1. Donc si l'on fait

$$\nu = xF'_x + yF'_y + zF'_z,$$

on a

$$X_1 = \frac{x^2F'_x}{\nu}, \quad Y_1 = \frac{y^2F'_y}{\nu}, \quad Z_1 = \frac{z^2F'_z}{\nu}. \tag{7}$$

L'équation du plan tangent en M à S étant

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0,$$

les coordonnées de M_{-1} seront

$$X_{-1} = \frac{\nu}{F'_x}, \quad Y_{-1} = \frac{\nu}{F'_y}, \quad Z_{-1} = \frac{\nu}{F'_z}. \tag{8}$$

De (7) et (8), on conclut de nouveau les relations (5).
Pour les coordonnées de M_n et M_{-n}, on trouve

$$X_n = \frac{x^{n+1}(F'_x)^n}{\nu^n}, \quad Y_n = \frac{y^{n+1}(F'_y)^n}{\nu^n}, \quad Z_n = \frac{z^{n+1}(F'_z)^n}{\nu^n}$$

$$X_{-n} = \frac{\nu^n}{x^{n-1}(F'_x)^n}, \quad Y_{-n} = \frac{\nu^n}{y^{n-1}(F'_y)^n}, \quad Z_{-n} = \frac{\nu^n}{z^{n-1}(F'_z)^n}.$$

5 Si l'on prend pour S une surface de Lamé

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$

les équations des transformées S_n et S_{-n} seront

$$\sum\left(\frac{X_n}{a}\right)^{\frac{m}{mn+1}} = 1, \qquad \sum\left(\frac{a}{X_{-n}}\right)^{\frac{m}{mn-1}} = 1. \tag{9}$$

Ces nouvelles surfaces sont donc encore des surfaces de Lamé.

6 Examinons les cas plus simples de $m = 1$ ou 2 et $n = 1$.

a) Lorsqu'un point M parcourt le plan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

l'enveloppe du plan μ qui passe par les projections de M sur les axes, a pour équation

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1.$$

Cette enveloppe est une surface du quatrième ordre. Si le plan μ rencontre les axes coordonnés en F, G, H, la surface coupe les plans xy, yz, zx suivant des paraboles touchant les axes respectivement en F, G, H.

b) Supposons qu'un plan μ qui passe par un point fixe M (a, b, c) rencontre les axes coordonnés en P, Q, R. L'équation du lieu du point M_{-1} se trouve par un raisonnement facile ; elle est

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \quad \text{ou} \quad xyz - \Sigma ayz = 0.$$

Le lieu est donc une surface cubique qui passe par les axes coordonnés et est coupée par des plans parallèles aux plans coordonnés suivant des hyperboles dont les asymptotes sont parallèles à deux axes coordonnés.

7. D'après les équations (9), l'enveloppe du plan qui passe par les projections d'un point de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sur les axes, a pour équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

et le lieu d'un point qui se projette sur les axes aux points d'intersection de ces axes avec un plan tangent quelconque à l'ellipsoïde est représenté par

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 1. \tag{10}$$

Cette équation représente une surface de sixième ordre qui passe par les axes coordonnés et dont les sections par les plans coordonnés sont des cruciales d'ellipses. Les plans tangents aux sommets de l'ellipsoïde sont des plans asymptotes.

8. Les transformations précédentes en suggèrent d'autres. Par exemple, à un point M qui se projette sur les axes en P, Q, R, on fait correspondre l'ellipsoïde qui a pour centre O et pour sommets les points P, Q, R. Si le point M parcourt la surface S représentée par

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v),$$

l'ellipsoïde enveloppe une certaine surface.

Appelons x, y, z les coordonnées de M et X, Y, Z les coordonnées courantes. L'équation de l'ellipsoïde mobile est

$$\frac{X^2}{x^2} + \frac{Y^2}{y^2} + \frac{Z^2}{z^2} = 1. \tag{11}$$

Le point de contact M_1 de cette surface avec son enveloppe vérifie les équations

$$\frac{X^2}{x^3} x'_u + \frac{Y^2}{y^3} y'_u + \frac{Z^2}{z^3} z'_u = 0, \tag{12}$$

$$\frac{X^2}{x^3} x'_v + \frac{Y^2}{y^3} y'_v + \frac{Z^2}{z^3} z'_v = 0. \tag{13}$$

Les coordonnées de ce point sont donc

$$X_1 = \sqrt{\frac{x^3\xi}{\lambda}}, \quad Y_1 = \sqrt{\frac{y^3\eta}{\lambda}}, \quad Z_1 = \sqrt{\frac{z^3\zeta}{\lambda}}. \tag{14}$$

Si le point M parcourt la surface $F(x, y, z) = 0$, on exprimera que les équations

$$\frac{X^2}{x^3}dx + \frac{Y^2}{y^3}dy + \frac{Z^2}{z^3}dz = 0,$$

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0$$

sont identiques, ce qui donne

$$\frac{\frac{X^2}{x^2}}{xF'_x} = \frac{\frac{Y^2}{y^2}}{yF'_y} = \frac{\frac{Z^2}{z^2}}{zF'_z} = \frac{\sum \frac{X^2}{x^2}}{\sum xF'_x} = \frac{1}{\nu}.$$

Donc

$$X_1^2 = \frac{x^3F'_x}{\nu}, \quad Y_1^2 = \frac{y^3F'_y}{\nu}, \quad Z_1^2 = \frac{z^3F'_z}{\nu}.$$

En particulier, si le point M parcourt le plan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, on trouve

$$X_1^2 = \frac{x^3}{a}, \quad Y_1^2 = \frac{y^3}{b}, \quad Z_1^2 = \frac{z^3}{c};$$

et l'enveloppe de l'ellipsoïde a pour équation

$$\left(\frac{X_1}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{Y_1}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{Z_1}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

9. Semblablement, à un plan μ qui coupe les axes en P, Q, R, on peut faire correspondre l'ellipsoïde qui a pour demi-axes OP, OQ, OR. Quand μ roule sur une certaine surface, l'ellipsoïde enveloppe une surface dont les équations paramétriques sont

$$X_{-1} = \sqrt{\frac{x\lambda}{\xi}}, \quad Y_{-1} = \sqrt{\frac{y\lambda}{\eta}}, \quad Z_{-1} = \sqrt{\frac{z\lambda}{\zeta}}. \qquad (15)$$

Des formules (14) et (15), on déduit, par un système de proportions analogue à celui employé précédemment

$$X_n^2 = \frac{x^{2n+1}\xi^{2n-1}}{\lambda^{2n-1}}; \quad Y_n^2 = \frac{y^{2n+1}\eta^{2n-1}}{\lambda^{2n-1}}; \quad Z_n^2 = \frac{z^{2n+1}\zeta^{2n-1}}{\lambda^{2n-1}},$$

$$X_{-n}^2 = \frac{\lambda^{2n-1}}{x^{2n-3}\xi^{2n-1}}; \quad Y_{-n}^2 = \frac{\lambda^{2n-1}}{y^{2n-3}\eta^{2n-1}}; \quad Z_{-n}^2 = \frac{\lambda^{2n-1}}{z^{2n-3}\zeta^{2n-1}}$$

II. Transformation des courbes gauches.

10. Nous pouvons étendre la transformation précédente aux courbes gauches. A un point M d'une courbe gauche K, faisons correspondre le plan μ passant par les projections de M sur les trois axes. Quand M se meut sur K, μ enveloppe une développable dont l'arête de rebroussement K_1 correspondra, par définition, à K. En appliquant à K_1 la même transformation et ainsi de suite, on obtient une suite de courbes K, K_1, K_2, ... Le plan μ joue en chaque point de K_1 le rôle de plan osculateur. Si donc on donne K_1, on obtiendra K en faisant correspondre aux plans osculateurs de K_1, les points se projetant sur les axes aux points de rencontre de ces plans avec les trois axes; nous donnerons encore à cette transformation le nom de *transformation cruciale*; de même, en transformant K, on obtiendra de la même manière une courbe K_{-1} dont on déduira une courbe K_{-2}, etc.

11. Supposons la courbe K donnée par

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t),$$

et cherchons les équations paramétriques de K_1 et K_{-1}. A M correspond le point de tangence M_1 de μ avec K_1. Si x, y, z sont les coordonnées de M, les coordonnées X_1, Y_1, X_1, de M_1 seront données par les relations

$$\sum \frac{X_1}{x} = 1, \quad \sum X_1 \frac{x'}{x^2} = 0, \quad \sum X_1 \frac{x''x - 2x'^2}{x^3} = 0, \qquad (1)$$

où x', x'' .... désignent les dérivées $\varphi_1'(t)$, $\varphi_1''(t)$, ...

D'après les deux dernières équations, les quantités $\frac{X_1}{x^3}, \frac{Y_1}{y^3}, \frac{Z_1}{z^3}$ sont proportionnelles aux déterminants formés avec deux colonnes du tableau

$$\left\| \begin{matrix} xx' & yy' & zz' \\ x''x - 2x'^2 & y''y - 2y'^2 & z''z - 2z'^2 \end{matrix} \right\|.$$

Posons

$$h = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

et appelons A, B, C, A_2, B_2, C_2, les mineurs de h relatifs à la première et à la troisième ligne, de sorte que

$$A = y'z'' - z'y'', \qquad A_2 = yz' - zy', \text{ etc.}$$

Nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{X_1}{x^3} = \rho[Ayz - 2A_2y'z'], \quad \frac{Y_1}{y^3} = \rho[Bzx - 2B_2z'x'], \\ \frac{Z_1}{z^3} = \rho[Cxy - 2C_2x'y']. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Le facteur ρ résulte de $\sum \frac{X_1}{x} = 1$; on trouve

$$\rho[\Sigma Ax^2yz - 2\Sigma A_2x^2y'z'] = \rho[xyzh - 2\Sigma A_2x^2y'z'] = 1.$$

Le plan osculateur en M est donné par

$$\Sigma(X - x)A = 0. \quad (B)$$

On en déduit immédiatement :

$$X_{-1} = \frac{h}{A}, \quad Y_{-1} = \frac{h}{B}, \quad Z_{-1} = \frac{h}{C}.$$

12. Considérons une surface S donnée par les équations

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v).$$

Les transformations cruciale et sous-cruciale appliquées à S, conduisent à deux surfaces S_1 et S_{-1} représentées par

$$X_1 = \frac{x^2\xi}{\lambda}, \quad Y_1 = \frac{y^2\eta}{\lambda}, \quad Z_1 = \frac{z^2\zeta}{\lambda}, \tag{A'}$$

$$X_{-1} = \frac{\lambda}{\xi}, \quad Y_{-1} = \frac{\lambda}{\eta}, \quad Z_{-1} = \frac{\lambda}{\zeta}, \tag{B'}$$

où ξ, η, ζ, λ ont des significations connues.

Soit K une courbe tracée sur la surface S. Nous pouvons envisager deux transformées cruciales de K :

1° La transformée cruciale *absolue* de K, qui est le lieu des points qui se projettent sur les axes coordonnés aux points d'intersection de ces axes avec les plans osculateurs de K ;

2° La transformée cruciale *relative* de K, qui est le lieu des points qui se projettent sur les axes coordonnés aux points de rencontre de ces axes avec les plans tangents menés à S le long de K.

De même, si l'on projette un point quelconque M de K sur les trois axes, on peut considérer deux transformées sous-cruciales :

1° On cherche le point de contact du plan des projections dans la tranformée sous-cruciale de S et l'on prend le lieu de ce point lorsque M parcourt K ;

2° On cherche le point de contact du plan des projections lorsque M se déplace sur K. Nous dirons, dans le premier cas, que la transformation sous-cruciale est *relative;* dans le second cas, qu'elle est *absolue.*

Supposons la courbe K donnée par les équations

$$x = \varphi_1(u, v); \qquad y = \varphi_2(u, v); \qquad z = \varphi_3(u, v),$$

où l'on a attribué à v une valeur fixe v_0, u restant variable. La transformée sous-cruciale absolue de K est donnée par les formules (A), où l'on pose

$$x' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \quad y' = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \ldots; \quad x'' = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2}, \ldots,$$

v ayant la valeur v_0.

La transformée relative est donnée par les formules (A′), où l'on fait $v = v_0$. De même, la transformée cruciale absolue de K est donnée par les formules (B); la transformée relative est donnée par (B′).

Les transformées absolues n'emploient que les dérivées de φ_1, φ_2, φ_3 par rapport à u, tandis que les transformées relatives emploient les dérivées par rapport à u et à v.

Exemple. — Transformée d'un cercle horizontal ayant pour équations

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad z = h.$$

Tous les plans PQR $\equiv \mu$ passent par le point de rencontre R du plan du cercle avec $0z$ et sont tangents à la transformée sous-cruciale de la projection horizontale du cercle sur le plan xy.

On peut chercher la transformée relative en supposant le cercle sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. On a alors, en posant

$$R = 2h, \qquad a = \pm R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1}, \qquad b = \frac{R}{\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-1}},$$

les équations suivantes :

$$(X_n)^{\frac{2}{2n+1}} + (Y_n)^{\frac{2}{2n+1}} = a^{\frac{2}{2n+1}}.$$

$$\left(\frac{b}{X_{-n}}\right)^{\frac{2}{2n-1}} + \left(\frac{b}{Y_{-n}}\right)^{\frac{2}{2n-1}} = 1.$$

13. Les calculs relatifs à l'enveloppe des plans μ qui correspondent aux points d'une courbe K et à l'arête de rebroussement de cette surface, peuvent souvent se simplifier. En effet, l'équation du plan μ étant

$$\alpha \equiv \frac{X}{\varphi_1(u)} + \frac{Y}{\varphi_2(u)} + \frac{Z}{\varphi_3(u)} - 1 = 0,$$

où $x = \varphi_1(u)$, $y = \varphi_2(u)$, $z = \varphi_3(u)$ sont les équations de K, remplaçons u par $\frac{u}{v}$. Nous pourrons considérer à volonté soit v comme fixe et u comme variable, soit u comme fixe et v comme variable. Par suite, pour l'enveloppe de μ, on peut écrire

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0,$$

et pour l'arête de rebroussement

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial \alpha^2}{\partial v^2} = 0,$$

u étant remplacé par $\frac{u}{v}$ et les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 étant rendues entières en u et v.

14. Supposons la courbe K définie par les équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad f(x, y, z) = 0.$$

L'enveloppe du plan μ relative à la surface $F = 0$ s'obtient en écrivant

$$\Sigma \frac{X}{x} = 1, \quad \Sigma \frac{X dx}{x^2} = 0, \quad \Sigma F'_x dx = 0,$$

et en identifiant les deux dernières équations, de sorte que

$$\frac{X}{x^2} : \frac{Y}{y^2} : \frac{Z}{z^2} = F'_x : F'_y : F'_z. \qquad (1)$$

A cette dernière équation, il faut joindre

$$\Sigma \frac{X}{x} = 1, \quad F = 0.$$

On obtiendrait de même l'enveloppe du plan μ relative à la surface $f = 0$.

Pour avoir la transformée absolue de K, on élimine dx, dy, dz entre

$$\Sigma X \frac{dx}{x^2} = 0, \quad \Sigma F'_x dx = 0, \quad \Sigma f'_x dx = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \frac{X}{x^2} & \frac{Y}{y^2} & \frac{Z}{z^2} \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

équation qui, combinée avec $\Sigma \frac{X}{x} = 1$, $F = 0$, $f = 0$, donne, après élimination de x, y, z, l'enveloppe de μ pour les points de K, c'est-à-dire la développable dont K_1 est l'arête de rebroussement et qui a pour génératrices rectilignes les tangentes à K_1.

La tangente à K_1, au point M_1, a pour équations $\Sigma \frac{X}{x} = 1$ et (2). L'équation (2) est vérifiée par les valeurs (1) de $\frac{X}{x^2}, \frac{Y}{y^2}, \frac{Z}{z^2}$. Donc, la tangente passe par les points de contact du plan μ lorsque M se meut sur K, mais est considérée successivement sur les surfaces F et f. Cette propriété subsiste quelles que soient les surfaces $F = 0$ et $f = 0$ choisies. Ce résultat nous sera utile dans la suite.

15 *Transformée d'une droite.* — Considérons une droite d données par les coordonnées (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), de deux

de ses points. Un point quelconque M de d a pour coordonnées

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

où le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ est variable; on pourrait aussi considérer l'une des quantités λ_1, λ_2 comme fixe et l'autre comme variable.

Le plan μ qui passe par les projections de M sur les axes coordonnés a pour équation

$$\sum \frac{X}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{1}$$

Pour trouver l'enveloppe de μ, on peut dériver (1) tour à tour par rapport à λ_1 et par rapport à λ_2, ce qui donne

$$\sum \frac{X x_1}{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^2} = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}, \quad \sum \frac{X x_2}{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^2} = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}. \tag{2}$$

L'équation de l'enveloppe s'obtient en éliminant le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ entre les deux équations (2).

On arrive plus facilement au résultat en mettant l'équation (1) sous forme entière et ordonnée par rapport à λ_1 et λ_2, ce qui donne

$$M\lambda_1^3 + 3N\lambda_1^2\lambda_2 + 3P\lambda_1\lambda_2^2 + Q\lambda_2^3 = 0. \tag{3}$$

Dérivons maintenant par rapport à λ_1 et λ_2; il vient

$$\begin{aligned} M\lambda_1^2 + 2N\lambda_1\lambda_2 + P\lambda_2^2 &= 0, \\ N\lambda_1^2 + 2P\lambda_1\lambda_2 + Q\lambda_2^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Des équations (4) on tire

$$\lambda_1^2 : 2\lambda_1\lambda_2 : \lambda_2^2 = (NQ - P^2) : (PN - MQ) : (MP - N^2);$$

d'où l'équation cherchée

$$(MQ - PN)^2 = 4(NQ - P^2)(MP - N^2),$$

qui représente une surface du quatrième ordre.

De l'équation (5), on conclut que par un point quelconque, il passe trois plans μ ; donc la surface est de la troisième classe.

Pour trouver l'arête de rebroussement, on peut dériver les équations (2) par rapport à λ_1 et λ_2, ce qui donne

$$\sum \frac{X x_1^2}{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^5} = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^5}; \quad \sum \frac{X x_1 x_2}{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^5} = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^5}$$

$$\sum \frac{X x_2^2}{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^5} = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^5}.$$

En remplaçant X, Y, Z par $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$, on voit que les quantités

$$\frac{X}{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^5}, \frac{-Y}{(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^5}, \frac{Z}{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)^5}, \frac{T}{(\lambda_1 + \lambda_2)^5},$$

sont proportionnelles aux déterminants obtenus en supprimant successivement la première, la deuxième, la troisième, la quatrième colonne du tableau rectangulaire

$$\left\| \begin{matrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & 1 \\ x_1 x_2 & y_1 y_2 & z_1 z_2 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Les coordonnées homogènes sont donc de la forme

$$\varrho X = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^5 k_1; \quad \varrho Y = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^5 k_2; \quad \varrho Z = (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)^5 k_3;$$
$$\varrho T = (\lambda_1 + \lambda_2)^5 k_4.$$

La courbe est donc une cubique; les coordonnées de ses points sont égales aux cubes des coordonnées des points correspondants de K multipliés par des constantes.

16. Considérons l'ensemble des plans tangents à une courbe gauche donnée K

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t).$$

Ces plans appartiennent à une *congruence de plans;* car chacun d'eux dépend de t et d'un second paramètre λ, qui est, par exemple, le rapport des distances d'un point de ce plan au plan osculateur et au plan rectifiant qui passent par la même tangente de K.

Le point qui correspond crucialement à un plan de la congruence dépend des mêmes paramètres ; donc il décrit une certaine surface Σ.

L'ordre de Σ est le nombre de plans tangents à la fois à K et à deux surfaces du quatrième ordre. En effet, pour trouver le nombre de points communs à Σ et à une droite d, menons par d deux plans quelconques α, β; ces plans ont pour transformées sous-cruciales deux surfaces du quatrième ordre T et V. Un plan tangent commun à K, T, V est tel que le point qui lui correspond crucialement se trouve à la fois sur d et sur Σ.

17. A une courbe gauche K correspondent une infinité de transformées sous-cruciales relatives et une seule transformée sous-cruciale absolue K_1 ; à un point M de K correspondent une infinité de points que nous savons être situés sur la tangente en M_1 à K_1, M_1 désignant le point correspondant à M sur K_1. Lorsque la tangente se déplace, elle engendre une développable et les points de cette tangente engendrent l'ensemble des transformées sous-cruciales relatives de K. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La développable ayant pour arête de rebroussement la transformée sous-cruciale absolue* K_1, *d'une courbe gauche* K, *est l'enveloppe des transformées sous-cruciales des surfaces passant par* K. *Les lignes de tangence sont les transformées relatives de* K.

Réciproquement, considérons deux surfaces S et Σ et supposons qu'on puisse leur circonscrire une développable Δ Celle-ci a une transformée cruciale qui est une certaine courbe K. On vérifie facilement que K est la ligne d'intersection des surfaces S_{-1} et Σ_{-1}, correspondant crucialement à S et Σ.

Si S est une surface développable, il n'y a qu'un nombre fini de plans tangents communs à S et Σ. Comme la transformée cruciale de S est alors une courbe gauche K, il s'ensuit que les plans tangents communs correspondent aux points d'intersection de K avec Σ_{-1}. Si Σ a une équation de la forme

$$\sum\left(\frac{a}{X}\right)^{\frac{1}{2}} = 1, \qquad \text{(A)}$$

nous avons établi que cette surface est la transformée sous-cruciale du plan

$$\sum\frac{X}{a} = 1.$$

Le nombre de plans tangents communs à la développable S et à la surface (A), donne l'ordre de la courbe correspondant crucialement à S.

Qu'il nous soit permis, en terminant cette étude, de remercier M. le professeur Neuberg, des savants et judicieux conseils dont il a bien voulu accompagner la rédaction de notre modeste travail.

SUR

DEUX LIEUX GÉOMÉTRIQUES

DE L'HYPERESPACE

ET

LA GÉOMÉTRIE DES FORMES BINAIRES

PAR

J. FAIRON

RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

SUR

DEUX LIEUX GÉOMÉTRIQUES

DE L'HYPERESPACE

ET

LA GÉOMÉTRIE DES FORMES BINAIRES

Le travail actuel a pour objet d'étudier dans les espaces à un nombre pair de dimensions $2n$ ($n > 2$) deux hypersurfaces, l'une du second ordre, l'autre d'ordre $n + 1$.

Nous faisons correspondre l'équation de la première à l'invariant quadratique de la forme binaire d'ordre $2n$. L'équation de la seconde se rapporte de même à l'invariant d'ordre $n + 1$ qui, égalé à zéro, exprime la condition nécessaire pour que la forme considérée soit réductible à une somme de n puissances de degré $2n$; cet invariant est le *catalecticant* de Sylvester.

Nous indiquerons la génération de ces figures, leurs propriétés principales et leurs liaisons avec l'interprétation de certaines fonctions invariantes du système fondamental de la forme binaire ou du système simultané de plusieurs formes.

Pour la simplicité, nous envisagerons la question quand $n = 2$, c'est-à-dire dans l'espace à quatre dimensions. Cependant, lorsque cela est possible, nous donnerons au fur et à mesure une idée des propriétés dans le cas général.

*
* *

1. Les espaces à un nombre impair de dimensions $2n + 1$, considérés au point de vue de la polarité, sont homogènes en tous leurs points (*) en ce sens que tout espace linéaire à $2n$ dimensions renferme son pôle, pris par rapport à la courbe normale d'ordre $2n + 1$.

Analytiquement, ce fait s'exprime par l'annulation identique d'un invariant qui constituerait la transvection d'ordre $2n + 1$ d'une forme binaire du même ordre sur elle-même.

Au contraire, les espaces à un nombre pair de dimensions $2n$ ne sont pas homogènes partout. Il n'y existe qu'une infinité d'ordre $2n - 1$ de points satisfaisant à la condition d'être situés dans leur hyperplan polaire à $2n - 1$ dimensions par rapport à la courbe normale d'ordre $2n$.

Nous envisageons ci-après le lieu de ces points.

Soit la courbe normale C_4, de l'espace à quatre dimensions, donnée par les équations paramétriques

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5 = x_1^4 : 4x_1^3x_2 : 6x_1^2x_2^2 : 4x_1x_2^3 : x_2^4, \qquad (1)$$

$\frac{x_1}{x_2}$ étant le paramètre variable.

L'hyperplan polaire, c'est-à-dire l'espace linéaire à trois dimensions, polaires d'un point A quelconque de coordonnées

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5 = a_4 : -4a_3 : 6a_2 : -4a_1 : a_0, \qquad (2)$$

pris par rapport à cette courbe, a pour équation

$$a_0z_1 + a_1z_2 + a_2z_3 + a_3z_4 + a_4z_5 = 0. \qquad (3$$

Cet espace, que nous désignerons par (a), rencontre la courbe C_4 aux points dont les paramètres sont les racines de la forme binaire

$$f_4 \equiv a_x^4 \equiv a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4. \qquad (4)$$

(*) Fr. Deruyts, *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale*, Thèse IX, p. 197. (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, t. XVII, 2e série.)

Pour obtenir l'équation du lieu des points qui se trouvent dans leur espace polaire, il suffira d'éliminer les quantités $a_0, a_1, \ldots a_4$ entre les relations (2) et (3). Nous obtenons ainsi

$$12z_1z_3 - 3z_2z_4 + z_3^2 = 0, \qquad (5)$$

équation d'une hypersurface du second ordre que nous désignons par S_2.

L'hypersurface S_2 *passe par la courbe* C_4 *tout entière.* — Et ainsi, les espaces linéaires à trois dimensions qui rencontrent C_4 en quatre points coïncidents (hyperplans surosculateurs à C_4) ont pour pôle le point de contact.

2. L'espace polaire du point A, pris relativement à l'hypersurface S_2, se représente par l'équation (3).

Il en résulte que *la courbe normale* C_4 *et l'hypersurface* S_2 *ont, par rapport au point* A *de l'espace à quatre dimensions, le même hyperplan polaire.*

Le covariant $f_4 \equiv a_x^4$ s'interprète donc géométriquement au moyen de S_2 ; il se rapporte à l'hyperplan polaire d'un point A dont les coordonnées sont données par les coefficients de la forme pris avec des signes alternés, comme l'indiquent les rapports (2). Nous dirons que *ce point correspond à la forme* f_4.

Lorsque le point A est situé sur l'hypersurface S_2, on a

$$a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 = 0, \qquad (6)$$

expression dont le premier membre est l'invariant quadratique (*)

$$I \equiv (f_4, f_4)^4$$

de la forme biquadratique f_4.

Cette condition (6) étant réalisée, l'hyperplan répondant à la formule (3) est tangent à S_2 au point A.

(*) Nous employons ici et dans la suite la notation de M. Gordan.

Réciproquement, un hyperplan, exprimé par la relation (3), est tangent à S_2 si $I = 0$.

Ainsi, *l'égalité* $I = 0$ *est l'équation tangentielle de l'hypersurface* S_2. *Elle exprime que le point* A *est situé sur cette hypersurface et en même temps que ce point est dans son hyperplan polaire pris par rapport à* S_2 *ou à* C_4.

Nous pourrions, à partir d'ici, étudier S_2 en nous servant soit de la formule (5), soit de la formule (6). Nous suivrons la méthode la plus ordinaire en utilisant l'équation ponctuelle.

— Les quelques remarques qui précèdent sont générales. Dans tout espace à $2n$ dimensions existe une hypersurface S_2 à $2n - 1$ dimensions qui permet d'interpréter la forme binaire f_{2n} et son invariant $I \equiv (f_{2n}, f_{2n})^{2n}$.

Lorsque $n = 1$, la conique ayant pour équations

$$z_1 : z_2 : z_3 = x_1^2 : 2x_1x_2 : x_2^2,$$

ou bien

$$4z_1z_3 - z_2^2 = 0,$$

est à la fois la courbe C_2 et la variété S_2. Il n'existe pas, dans l'espace à deux dimensions, de point qui appartienne à sa polaire en dehors de la courbe normale.

Dans les espaces à un nombre pair de dimensions $2n$ $(n > 1)$, *non seulement les points de la courbe normale sont situés dans leur espace polaire. mais il existe une hyperquadrique* S_2, *passant par la courbe normale, dont tous les points jouissent de cette propriété.*

La raison analytique de cette sorte d'anomalie semble être que l'invariant I de la forme quadratique $f_2 \equiv a_x^2$, égalé à zéro, exprime la condition *nécessaire et suffisante* pour que ses racines soient égales entre elles. Cette propriété n'appartient plus à l'invariant I, dans le cas général, n étant supérieur à l'unité.

— Eu égard aux propriétés des racines de l'équation $f_4 = 0$ et à la signification de l'invariant I de la forme biquadratique, on peut ajouter que *les espaces linéaires à trois dimensions, tan-*

gents à S_2, *marquent sur la courbe* C_4 *des groupes équianharmoniques de quatre points.*

3. Les hyperplans passant par le point A marquent sur la courbe C_4 les quaternes d'une involution biquadratique de troisième rang, I_3^4, dont le point A est le point principal.

Les éléments neutres de cette involution sont les groupes communs aux deux involutions cubiques correspondant aux équations

$$\left.\begin{aligned} a_0\theta_1\theta_2\theta_3 + a_1\Sigma\theta_1\theta_2 + a_2\Sigma\theta_1 + a_3 = 0, \\ a_1\theta_1\theta_2\theta_3 + a_2\Sigma\theta_1\theta_2 + a_3\Sigma\theta_1 + a_4 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

dans lesquelles les valeurs de θ sont les paramètres de points de la courbe normale.

Ces involutions cubiques ont pour éléments triples les racines des équations

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = 0.$$

Mais lorsque le point principal de l'involution I_3^4 est sur S_3, l'invariant I, qui est l'invariant quadratique simultané des deux formes dérivées ci-dessus, est nul.

En général, nous pourrons donc exprimer le théorème suivant :

Lorsque le point principal de l'involution I_{2n-1}^{2n} *est situé sur l'hypersurface* S_2, *les éléments multiples d'ordre* $2n-1$ *de l'une des involutions* I_{2n-2}^{2n-1} *dérivées, forment un groupe de* $2n-1$ *élements de l'autre involution.*

De plus, comme

$$I \equiv (f_{2n}, f_{2n})^{2n},$$

on voit que l'*hypersurface* S_2 *est le lieu des points principaux des involutions* I_{2n-1}^{2n} *telles que les éléments multiples d'ordre* $2n$ *constituent un groupe de* $2n$ *éléments de l'involution.*

Ou bien encore, *les espaces linéaires à* $2n-1$ *dimensions,*

tangents à S_2, marquent sur C_{2n} les éléments multiples d'ordre $2n$ d'involutions I^{2n}_{2n-1}, éléments constituant un groupe ordinaire de ces involutions.

— Dans le cas de la forme biquadratique, l'involution cubique de premier rang, I^3_1, caractérisée par l'ensemble des relations (7), donne lieu à une remarque qui semble intéressante.

Recherchons *le lieu des plans trisécants à C_4 qui marquent, par leurs intersections, les images des ternes de cette involution.*

Son équation s'obtient en éliminant les quantités θ entre les formules (7) et les suivantes qui représentent un plan trisécant

$$\left.\begin{aligned} 12z_1 - 3z_2\Sigma\theta_1 + 2z_3\Sigma\theta_1\theta_2 - 3z_4\theta_1\theta_2\theta_3 = 0, \\ 3z_2 - 2z_3\Sigma\theta_1 + 3z_4\Sigma\theta_1\theta_2 - 12z_5\theta_1\theta_2\theta_3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

C'est un déterminant du quatrième ordre qui, développé, donne la relation

$$\begin{aligned} &3(8z_1z_3 - 3z_2^2)(a_0a_2 - a_1^2) + 6(6z_1z_4 - z_2z_3)(a_0a_3 - a_1a_2) \\ &+ 9(16z_1z_5 - z_2z_4)(a_1a_3 - a_2^2) + (9z_2z_4 - 4z_3^2)(a_0a_4 - a_1a_3) \\ &+ 6(6z_2z_5 - z_3z_4)(a_1a_4 - a_2a_3) + 3(8z_3z_5 - 3z_4^2)(a_2a_4 - a_3^2) = 0. \end{aligned}$$

Ce lieu est donc une hyperquadrique, Σ_2.

Chacun des plans générateurs passe par le point A ; car les coordonnées de ce point, substituées dans les équations (8), donnent les équations (7).

Comme une involution I^3_1 possède quatre ternes formés d'un élément double et d'un élément simple, l'hyperquadrique Σ_2 a quatre plans générateurs seulement tangents à C_4.

D'après son mode de génération, elle renferme une infinité de bisécantes à cette courbe ; elle ne contient que quatre de ses tangentes.

Représentons par Σ_2 le premier membre de l'équation précédente. On peut écrire

$$\Sigma_2 \equiv 3\Sigma_2' + 4(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)(12z_1z_5 - 3z_2z_4 + z_3^2),$$

expression dans laquelle

$$\Sigma_2' \equiv (8z_1z_3 - 3z_2^2)(a_0a_2 - a_1^2) + 2(6z_1z_4 - z_2z_3)(a_0a_3 - a_1a_2)$$
$$+ (16z_1z_5 - z_2z_4)(a_0a_4 - a_1a_3) + (9z_2z_4 - 4z_3^2)(a_1a_3 - a_2^2)$$
$$+ 2(6z_2z_5 - z_3z_4)(a_1a_4 - a_2a_3) + (8z_3z_5 - 3z_4^2)(a_2a_4 - a_3^2).$$

L'hypersurface dont l'équation est $\Sigma_2' = 0$ *est le lieu d'un plan rencontrant* C_4 *en un seul point, plan qui est l'intersection des éléments homologues de deux faisceaux homographiques d'hyperplans.*

En effet, considérons les hyperplans qui rencontrent C_4 respectivement suivant les ternes de points figurant sur cette courbe les racines des formes $\frac{\partial f_4}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_4}{\partial x_2}$ et, en outre, simultanément, au point variable de paramètre θ.

Ces hyperplans se coupent suivant un plan qui passe par ce point. Ils ont pour équations

$$(4a_0z_1 + 3a_1z_2 + 2a_2z_3 + a_3z_4) - \theta(a_0z_2 + 2a_1z_3 + 3a_2z_4 + 4a_3z_5) = 0,$$
$$(4a_1z_1 + 3a_2z_2 + 2a_3z_3 + a_4z_4) - \theta(a_1z_2 + 2a_2z_3 + 3a_3z_4 + 4a_4z_5) = 0.$$

L'élimination de θ donne l'équation $\Sigma_2' = 0$.

Il résulte de la relation ci-dessous entre Σ_2 et Σ_2' que *quand* I *est nul, c'est-à-dire lorsque le point central de l'involution* I_3^4 *est sur* S_2, *l'hyperquadrique* Σ_2 *est douée d'un double mode de génération planaire : plans trisécants à* C_4; *plans rencontrant cette courbe en un seul point.*

En remplaçant les dérivées $\frac{\partial f_4}{\partial x}$ par deux formes cubiques quelconques φ_3 et φ_3', on généralise la notion des surfaces Σ_2 et Σ_2'. La relation qui lie leurs équations est alors

$$\Sigma \equiv 3\Sigma_2' + 4(\varphi_3, \varphi_3')^3(12z_1z_5 - 3z_2z_4 + z_3^2).$$

— Dans les cas où les invariants I et $(\varphi_3, \varphi_3')^3$ sont nuls, l'hyperquadrique rencontrée ici présente beaucoup d'analogie avec les hyperboloïdes réglés inscrits à une cubique gauche. Ces

quadriques possèdent un système de génératrices bisécantes à la courbe qui marquent sur celle-ci les couples d'une involution quadratique I_1^2; l'autre système de génératrices est formé de droites qui s'appuient simplement sur la courbe support.

4. Tout point de la bisécante unissant, sur C_4, les points de paramètres θ_1 et θ_2, a des coordonnées de la forme

$$\frac{z_1}{\theta_1^4 + k\theta_2^4} = \frac{z_2}{4(\theta_1^3 + k\theta_2^3)} = \frac{z_3}{6(\theta_1^2 + k\theta_2^2)} = \frac{z_4}{4(\theta_1 + k\theta_2)} = \frac{z_5}{1 + k}.$$

En les substituant dans le premier membre de l'équation ponctuelle de S_2 on a, réductions faites,

$$k(\theta_1 - \theta_2)^4,$$

expression qui n'est pas nulle. Donc, *aucune bisécante n'est génératrice de* S_2.

Si la droite devient tangente au point de paramètre $\theta_1 = \theta_2$, elle appartient à l'hypersurface.

Réciproquement, *toute tangente à* C_4 *est génératrice de* S_2.

En effet, la tangente au point de paramètre θ a pour équations

$$\begin{aligned} 6z_1 - 3z_2\theta + z_3\theta^2 &= 0, \\ 3z_2 - 4z_3\theta + 3z_4\theta^2 &= 0, \\ z_3 - 3z_4\theta + 6z_5\theta^2 &= 0. \end{aligned}$$

De ces relations, on déduit :

$$z_1 = \frac{\theta}{8}(3z_2 - z_4\theta^2), \quad z_3 = \frac{3}{4\theta}(z_2 + z_4\theta^2), \quad z_5 = \frac{1}{8\theta^3}(3z_4\theta^2 - z_2).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de S_2, le résultat

$$(3z_2 - z_4\theta^2)(3z_4\theta^2 - z_2) - 16z_2z_4\theta^2 + 3(z_2 + z_4\theta^2)^2 = 0$$

doit fournir les coordonnées z_2, z_4 des points d'intersection.

Cette dernière équation étant identiquement nulle, la tangente est tout entière sur l'hypersurface S_2.

5. Soient deux points A et B définis par les coordonnées

$$\left.\begin{aligned} z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5 &= a_4 : -4a_3 : 6a_2 : -4a_1 : a_0, \\ z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5 &= b_4 : -4b_3 : 6b_2 : -4b_1 : b_0, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

et correspondant respectivement aux formes $f_4 \equiv a_x^4$, $f_4' \equiv b_x^4$.

Tout point de la droite qui les unit répond aux formules

$$\frac{z_1}{a_4+kb_4} = \frac{z_2}{-4(a_3+kb_3)} = \frac{z_3}{6(a_2+kb_2)} = \frac{z_4}{-4(a_1+kb_1)} = \frac{z_5}{a_0+kb_0}. \quad (10)$$

La condition pour qu'il se trouve sur S_2 s'obtient, de même que ci-dessus, en substituant ces valeurs dans l'équation (5). On trouve

$$(aa) + k(ab) + k^2(bb) = 0, \quad (11)$$

expression dans laquelle (aa) et (bb) sont les invariants quadratiques de f_4 et f_4' et (ab) l'invariant simultané

$$(f_4, f_4')^4 \equiv a_4b_0 - 4a_3b_1 + 6a_2b_2 - 4a_1b_3 + a_0b_4.$$

La discussion de l'équation (11) nous fournira de nouveaux systèmes de génératrices S_2.

— 1° Les racines de cette équation sont indéterminées et la droite AB est située sur l'hypersurface, si l'on a simultanément

$$(aa) = 0, \quad (bb) = 0, \quad (ab) = 0.$$

Les deux premières relations ont une signification connue; la troisième, symétrique par rapport à f_4 et f_4', exprime que l'hyperplan (a) passe par le point B et que le point A se trouve en même temps dans l'hyperplan (b).

Donc, *toute droite unissant deux points* A *et* B *de l'hypersurface* S_2 *est une génératrice de celle-ci lorsque ces points appartiennent au même espace linéaire à trois dimensions* (a).

Ces conditions sont réalisées en particulier par les tangentes à C_4. Elles le sont encore si, le point A étant sur S_2, le point B fait partie de la surface d'intersection de S_2 et de l'hyperplan tangent en A.

La propriété analogue se rencontre dans les quadriques réglées : une droite est génératrice de la surface lorsqu'elle est l'intersection de deux plans tangents en deux points de cette droite.

— 2° Le cas particulier le plus intéressant à signaler est celui où le point B est un point de C_4, de paramètre $\frac{x_1}{x_2} \equiv \theta$ par exemple. Le point mobile sur AB a alors pour coordonnées

$$a_4 - k\theta^4, \quad -4(a_3 + k\theta^3), \quad 6(a_2 - k\theta^2), \quad -4(a_1 + k\theta_1), \quad a_0 - k; \quad (12)$$

l'invariant (bb) est identiquement nul et la relation (11) s'écrit

$$(aa) - k(a_0\theta^4 + 4a_1\theta^3 + 6a_2\theta^2 + 4a_3\theta + a_4) = 0.$$

On en déduit : *l'hypersurface* S_2 *renferme la droite* AB *joignant un point* A *de cette hypersurface au point de* C_4 *qui est l'image de l'une des racines de la forme biquadratique correspondant au point* A.

Par tout point de S_2 *passent quatre droites analogues à* AB, *s'appuyant sur* C_4. — Si les racines de f_4 sont réelles et inégales, les quatre droites sont distinctes.

Le lecteur aperçoit immédiatement les conclusions qu'il y aurait à tirer de cette remarque suivant la nature des racines de l'équation $f_4 = 0$ et l'hypothèse $I = 0$.

Dans les conditions actuelles, l'espace linéaire (a) passe par le point A et les quatre points considérés sur C_4; il renferme donc les quatres droites trouvées. Ces droites ne sont pas, en général, tangentes à C_4; car, par un point de l'espace à quatre dimensions, il ne peut passer qu'une tangente à C_4, quand il y en a une.

— 3° *Ces droites forment l'intersection de l'espace* (a) *et de plans menés par* A *tangentiellement à* C_4.

Le plan qui passe par A et qui est bisécant à C_4 aux points de

paramètres θ et θ' a des équations qui résultent de la matrice

$$\begin{Vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ a_4 & -4a_3 & 6a_2 & -4a_1 & a_0 \\ \theta^4 & 4\theta^3 & 6\theta^2 & 4\theta & 1 \\ \theta'^4 & 4\theta'^3 & 6\theta'^2 & 4\theta' & 1 \end{Vmatrix}$$

par la suppression, par exemple, de la cinquième, puis de la première colonne.

Si l'on pose ensuite $\theta = \theta'$ dans les résultats obtenus, on a les équations du plan tangent considéré; ce sont :

$$12z_1(a_3 + 2a_2\theta + a_1\theta^2) + 3z_2(a_4 - 3a_2\theta^2 - 2a_1\theta^3) - 2z_3(2a_4\theta + 3a_3\theta^2 - a_1\theta^4) + 3z_4(a_4\theta^2 + 2a_3\theta^3 + a_2\theta^4) = 0,$$

$$3z_2(a_2 + 2a_1\theta + a_0\theta^2) + 2z_3(a_3 - 3a_1\theta^2 - 2a_0\theta^3) - 3z_4(2a_3\theta + 3a_2\theta^2 - a_0\theta^4) + 12z_5(a_3\theta^2 + 2a_2\theta^3 + a_1\theta^4) = 0.$$

Ces équations sont vérifiées, quel que soit k, si l'on y substitue les valeurs (12) aux variables.

Donc, *l'hypersurface* S_2 *est le lieu des droites d'intersection des hyperplans tangents à* S_2 *et de plans menés par le point de contact tangentiellement à* C_4 *aux points où les hyperplans coupent la courbe normale.*

Ces droites sont aussi contenues dans les hyperplans surosculateurs ayant leur surosculation au point de paramètre θ *de la courbe.*

On obtient facilement l'équation de l'hyperplan surosculateur à C_4

$$z_1 - z_2\theta + z_3\theta^2 - z_4\theta^3 + z_5\theta^4 = 0;$$

et cette équation est aussi rendue identique par les valeurs (12), dans les hypothèses où nous nous sommes placé.

Les deux vérifications précédentes pourraient se faire encore en constatant tout simplement que le plan tangent ou l'espace surosculateur au point de paramètre θ contiennent le point A.

6 La droite AB sera tangente à S_2 si l'on a

$$4(aa)(bb) - (ab)^2 = 0, \qquad (13)$$

condition qui est en particulier réalisée quand on pose, par exemple,

$$(aa) = 0, \quad (ab) = 0.$$

Donc, *toute droite joignant un point* A *de* S_2 *à un point* B *quelconque de l'espace à trois dimensions, tangent en* A *à* S_2 *est tangente à l'hypersurface.*

Ce résultat est évident.

Lorsque $(aa) = 0$, le lieu des tangentes au point A de l'hypersurface S_2 s'obtiendra en éliminant, de la relation $(ab) = 0$, les quantités b qui représentent un point variable de la tangente. L'élimination peut se faire immédiatement en remplaçant les b par les z, au moyen de la seconde des expressions (9). On trouve ainsi l'équation de l'espace linéaire à trois dimensions, tangent en A à S_2, c'est-à-dire la formule (3).

Quand le point A est quelconque, si, dans la relation (13), on fait la même substitution, on a l'équation

$$(aa)(12z_1z_5 - 5z_2z_4 + z_3^2) - (a_0z_1 + a_1z_2 + a_2z_3 + a_3z_4 + a_4z_5)^2 = 0,$$

qui représente l'*hypercône du sommet* A *circonscrit à* S_2.

— La relation (11) se ramène à

$$(aa) + k^2(bb) = 0,$$

lorsque l'on pose $(ab) = 0$, c'est-à-dire quand on suppose le point B dans l'hyperplan polaire de A.

Donc, *toute droite qui unit le point* A *à un point quelconque de son hyperplan polaire est divisée harmoniquement par l'hypersurface* S_2.

C'est là, du reste, une propriété générale des hyperquadriques. En voici, en passant, une autre qui s'établit facilement.

L'équation

$$(a_0 + kb_0)z_1 + (a_1 + kb_1)z_2 + (a_2 + kb_2)z_3 + (a_3 + kb_3)z_4 + (a_4 + kb_4)z_5 = 0$$

représente un hyperplan (h) passant par le plan commun aux hyperplans (a) et (b).

Si l'on donne ici au paramètre k les valeurs qui vérifient la relation (11), l'hyperplan (h) a son pôle sur S_2 et est tangent à l'hypersurface.

Donc, *par un espace quelconque à deux dimensions passent seulement deux espaces linéaires à trois dimensions tangents à* S_2.

Ou bien, *par un plan de l'espace à quatre dimensions passent seulement deux hyperplans contenant leur pôle.*

— Les résultats précédents (numéros 4, 5 et 6) s'étendent facilement à l'hypersurface S_2 qui correspond, dans l'espace à $2n$ dimensions, à l'invariant $(f_{2n}, f_{2n})^{2n}$.

Ainsi, on a entre autres : *l'hypersurface* S_2 *porte l'ensemble des tangentes à la courbe normale* C_{2n}; *elle porte aussi l'ensemble des droites qui unissent un quelconque de ses points aux points qui, sur* C_{2n}, *sont les images des racines de la forme binaire* f_{2n} *correspondant au point choisi.*

7. Trois points, A, B, C, qui se rapportent respectivement aux formes f_4, f'_4, f''_4, déterminent un plan P de l'espace à quatre dimensions.

Un point de ce plan a pour coordonnées

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3, \\ z_2 &= -4(a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3), \\ z_3 &= 6(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3), \\ z_4 &= -4(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3), \\ z_5 &= a_0x_1 + b_0x_2 + c_0x_3, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

et il se déplace dans le plan si x_1, x_2, x_3 varient. Ces quantités peuvent être prises comme coordonnées courantes.

Les valeurs de x_1, x_2, x_3 correspondant aux points communs au plan P et à l'hypersurface S_2 satisfont à l'équation obtenue en substituant les valeurs (14) dans l'équation (5). On trouve

$$\begin{aligned}&(a_0x_1 + b_0x_2 + c_0x_3)(a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3)\\ &- 4(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3)(a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3)\\ &+ 3(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3)^2 = 0,\end{aligned}$$

expression que nous pourrons prendre pour équation de la conique K_2 d'intersection et qui s'écrit, avec les notations du numéro 5,

$$(aa)x_1^2 + (bb)x_2^2 + (cc)x_3^2 + (ab)x_1x_2 + (bc)x_2x_3 + (ac)x_1x_3 = 0. \quad (15)$$

On voit immédiatement que la conique K_2 est circonscrite au triangle de référence ABC si l'on a

$$(aa) = (bb) = (cc) = 0,$$

c'est-à-dire si les points A, B, C sont pris sur l'hypersurface S_2.

— Le discriminant de la conique K_2 est

$$\begin{vmatrix} 2(aa) & (ab) & (ac) \\ (ab) & 2(bb) & (bc) \\ (ac) & (bc) & 2(cc) \end{vmatrix}.$$

Il est nul, entre autres : 1° si

$$(aa) = (ab) = (bb) = 0;$$

ces conditions marquent que le plan ABC passe par la droite AB rencontrée au numéro 5, 1°; la conique K_2 est composée de cette droite et de celle qui a pour équation

$$(ac)x_1 + (bc)x_2 + (cc)x_3 = 0;$$

ici donc, le plan ABC est tangent à S_2 en un point de AB;

2° si

$$(aa) = (ab) = (ac);$$

alors les points B et C sont pris dans l'hyperplan (a) tangent à S_2 au point A; les droites d'intersection ont pour équations

$$(bb)x_2^2 + (cc)x_3^2 + (bc)x_2x_3 = 0,$$

formule qui doit se décomposer en deux facteurs du premier degré, distincts, égaux ou imaginaires.

Lorsque les points B et C varient, l'ensemble des droites obtenues constitue une gerbe de sommet A; si l'on prend ces points en particulier aux intersections de (a) et de C_4, on retrouve les droites mentionnées au numéro 5, 2°.

Ici, le plan ABC est tangent à S_2 en A.

— Pour que l'équation (15) soit identique et que le plan P appartienne à l'hypersurface S_2, il faut et il suffit que l'on ait simultanément

$$(aa) = (bb) = (cc) = 0,$$
$$(ab) = (bc) = (ca) = 0,$$

c'est-à-dire que, les points A, B et C étant sur S_3, ils se trouvent en outre, tous ensemble, dans les hyperplans (a), (b) et (c).

Donc, *lorsque trois hyperplans tangents à* S_3 *ont en commun le plan qui joint leurs points de contact, ce plan est tout entier sur* S_2.

8. Supposons actuellement que l'un des points, C, par exemple, soit pris sur la courbe normale C_4 et y ait pour paramètre θ. Dans ce cas

$$(ac) \equiv a_0\theta^4 + 4a_1\theta^3 + 6a_2\theta^2 + 4a_3\theta + a_4 \equiv (a\theta),$$
$$(bc) \equiv (b\theta).$$

Les points A et B étant sur S_2, la relation (15) s'écrit :

$$(ab)x_1x_2 + (a\theta)x_1x_3 + (b\theta)x_2x_3 = 0.$$

On voit de nouveau que, si θ est racine de $f_4 \equiv a_x^4 = 0$, la formule précédente se réduit à

$$x_2[(ab)x_1 + (b\theta)x_2] = 0;$$

elle donne une des quatre droites rencontrées déjà aux numéros 5 et 7.

— Le cas où le plan ABC est trisécant à C_4 mérite une mention spéciale; il rencontre toujours S_2 suivant une conique propre. Si l'on prend A, B et C sur la courbe C_4, aux points de paramètres θ_1, θ_2, θ_3, on voit facilement que l'équation (15) prend la forme :

$$(\theta_1 - \theta_2)^4 x_1 x_2 + (\theta_2 - \theta_3)^4 x_2 x_3 + (\theta_3 - \theta_1)^4 x_3 x_1 = 0.$$

La conique est circonscrite au triangle ABC.
Son discriminant est

$$2(\theta_1 - \theta_2)^4 (\theta_2 - \theta_3)^4 (\theta_3 - \theta_1)^4;$$

il est donc proportionnel au carré du discriminant de la forme cubique binaire qui aurait pour racines les quantités θ_1, θ_2 et θ_3.

— Si le plan ABC est tangent au point $\theta_1 \equiv \theta_2$ et sécant au point θ_3, la conique se décompose; l'une des droites est la tangente en θ_1; la seconde ne peut être la bisécante joignant les points θ_1 et θ_3, ainsi que cela résulte d'une remarque faite ci-dessus (n° 4).

Quand $\theta_1 \equiv \theta_2 \equiv \theta_3$, le plan est osculateur à C_3; l'équation de la conique devenant identique, il semblerait que le plan ABC tout entier appartienne à S_2. Cependant il est facile de montrer qu'*un plan osculateur coupe* S_2 *suivant deux droites coïncidentes*, autrement dit *ce plan est tangent à* S_2 *tout le long d'une droite, tangente elle-même à la courbe normale.*

En effet, le plan osculateur au point de paramètre θ a pour équations :

$$\left.\begin{aligned} 4z_1 - 3z_2\theta + 2z_3\theta^2 - z_4\theta^3 &= 0, \\ z_2 - 2z_3\theta + 3z_4\theta^2 - 4z_5\theta^3 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

On tire de là

$$\left.\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{2\theta}(3z_1 + z_3\theta^2 - z_5\theta^4), \\ z_4 &= \frac{1}{2\theta^2}(-z_1 + z_3\theta^2 + 3z_5\theta^4); \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

et ces valeurs, substituées dans l'équation de S_2, donnent, tous calculs faits :

$$(3z_1 - z_3\theta^2 + 3z_5\theta^4) = 0.$$

Cette dernière formule est une des équations de la tangente à C_4 au point de paramètre θ; elle vérifie l'énoncé précédent.

9. Les sections de l'hypersurface S_2 par des hyperplans donnent des quadriques : S_2 est le lieu de ces quadriques.

Tout point d'un espace linéaire à trois dimensions (x) est déterminé par les formules

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 + d_4x_4, \\ z_2 &= -4(a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4), \\ z_3 &= 6(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4), \\ z_4 &= -4(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4), \\ z_5 &= a_0x_1 + b_0x_2 + c_0x_3 + d_0x_4, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

les quantités $(a_4, -4a_3, 6a_2, -4a_1, a_0)$, ..., servant à définir les points A, B, C et D de cet espace qui correspondent aux formes f_4, f_4', f_4'' et f_4'''.

L'équation pouvant représenter la quadrique Q_2 d'intersection s'obtiendra en substituant les expressions précédentes dans l'équation de S_2. On trouve ainsi, en abrégé,

$$\Sigma(aa)x_1^2 + \Sigma(ab)x_1x_2 = 0. \quad (19)$$

Annuler simultanément les coefficients de cette équation, c'est établir les conditions pour que l'espace (x) soit situé tout entier sur S_2; c'est donc marquer que S_2 se réduit à deux

hyperplans, et que, la courbe normale, qui est sur S_2, appartient simultanément à deux espaces linéaires à trois dimensions et est par conséquent plane ; ou bien qu'elle est dans un espace à trois dimensions et est, au plus, gauche.

D'un autre côté, l'espace (x) rencontre la courbe C_4 en quatre points dont les paramètres sont racines de la forme biquadratique binaire déduite de l'équation (10) en remplaçant les variables $z_1, z_2, \ldots z_5$ par $x_1^4, x_1^3x_2, \ldots x_2^4$. Annuler les coefficients serait donc exprimer encore que la courbe C_4 tout entière est sur Q_2.

Enfin, si, procédant comme on fait pour les quadriques, on cherche le discriminant de S_2, on trouve le nombre absolu 96 ; d'ailleurs, décomposer l'équation $S_2 = 0$ reviendrait à décomposer l'équation tangentielle $I = 0$.

L'hypersurface S_2 *n'est donc jamais réductible à deux hyperplans.*

— La quadrique Q_2 est toujours circonscrite au tétraèdre dont les sommets sont ses intersections avec C_4 ; si l'on choisit les points A, B, C, D sur S_2, elle est encore circonscrite au tétraèdre ABCD de référence. Son équation se ramène alors à la forme

$$(ab)x_1x_2 + (ac)x_1x_3 + (ad)x_1x_4 + (bc)x_2x_3 + (bd)x_2x_4 + (cd)x_3x_4 = 0. \quad (20)$$

L'étude simultanée des deux tétraèdres considérés sort de notre cadre.

— *Parmi les quadriques* Q_2, *il en est un nombre infini de réglées.* Car, si un plan passe par une des génératrices rectilignes (g) de S_2, il coupe l'hypersurface suivant une seconde droite. Ce plan, en tournant autour de (g), donne les génératrices d'un mode d'une quadrique réglée inscrite à S_2 pourvu qu'il reste constamment dans un espace à trois dimensions renfermant (g).

En particulier, *la quadrique correspondant à l'équation* (20) *est réglée si l'un de ses coefficients,* (ab) *par exemple, est nul;* cela arrivera si le point B est choisi dans l'espace (a) tangent en A à S_2.

Car si nous coupons la quadrique par le plan ABC, représenté par l'équation $x_4 = 0$ et contenu dans l'espace (x), nous obtenons

$$x_3[(ac)x_1 + (bc)x_2] = 0,$$

c'est-à-dire deux droites; la quadrique qui les porte est donc réglée.

Dans ce cas, le discriminant de la quadrique est le carré de l'expression

$$(ac)(bd) - (ad)(bc),$$

et la quadrique sera un cône si les invariants satisfont à la condition

$$\frac{(ac)}{(ad)} = \frac{(bc)}{(bd)}.$$

— Le discriminant de la quadrique (19) est nul si l'on a

$$(aa) = (ab) = (ac) = (ad) = 0,$$

c'est-à-dire si le plan BCD est contenu dans l'hyperplan tangent en A à S_2. Cette hypothèse est réalisée en particulier quand les points B, C, D, situés sur la courbe normale, y ont pour paramètres trois racines de la forme biquadratique $f_4 = 0$.

La quadrique répondant à ces conditions est donc un cône de sommet A.

Il est encore nul, si l'on a

$$(aa) = (bb) = (cc) = 0,$$
$$(ab) = (ac) = (ad) = 0,$$

c'est-à-dire (numéro 7) si le plan ABC est tout entier sur S_2. Il est clair que ces conditions expriment que la quadrique se décompose en deux plans.

10. Tout hyperplan (a) est quadrisécant à C_4. En prenant ses quatre points d'intersection, de paramètres θ_1, θ_2, θ_3, θ_4,

pour sommets du tétraèdre de référence, l'équation de la quadrique peut s'écrire sous forme abrégée

$$\Sigma(\theta_1 - \theta_2)^4 x_1 x_2 = 0. \tag{21}$$

Le discriminant est

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & (\theta_1-\theta_2)^4 & (\theta_1-\theta_3)^4 & (\theta_1-\theta_4)^4 \\ (\theta_1-\theta_2)^4 & 0 & (\theta_2-\theta_3)^4 & (\theta_2-\theta_4)^4 \\ (\theta_1-\theta_3)^4 & (\theta_2-\theta_3)^4 & 0 & (\theta_3-\theta_4)^4 \\ (\theta_1-\theta_4)^4 & (\theta_2-\theta_4)^4 & (\theta_3-\theta_4)^4 & 0 \end{vmatrix}.$$

S'il est nul, la quadrique est un cône. C'est ce qui a lieu quand l'hyperplan (a) est tangent à S_2.

Car alors les droites joignant le point A aux quatre points d'intersection sur la courbe normale appartiennent à l'espace (a) et à S_2 (numéro 5, 2°); la quadrique, qui renferme ces droites, est un cône de sommet A.

Ainsi, *tout hyperplan tangent à l'hypersurface* S_2 *rencontre celle-ci suivant un cône du second ordre ayant le point de contact pour sommet.*

Cette circonstance se présente quand l'invariant I de a_x^4 est nul. Il en résulte que le discriminant Δ contient I comme facteur.

Pour le faire apparaître et exprimer Δ en fonction des invariants de a_x^4, posons

$$\begin{aligned} (\theta_1 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_4) &= a, \\ (\theta_1 - \theta_3)(\theta_4 - \theta_2) &= b, \\ (\theta_1 - \theta_4)(\theta_2 - \theta_3) &= c. \end{aligned}$$

On obtient

$$\Delta = (a^4 + b^4 + c^4)^2 - 6(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4).$$

Les relations suivantes sont bien connues :

$$\left.\begin{aligned} \frac{24\,\mathrm{I}}{a_0} &= a^2 + b^2 + c^2, \\ \frac{12\,\mathrm{I}}{a_0} &= -(ab + bc + ca). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Cette dernière se déduit de l'identité

$$a + b + c \equiv 0, \tag{23}$$

qui donne

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca).$$

Au moyen des relations (22) et (23), on voit facilement que

$$\Delta = \frac{288\, I}{a_0}\left(a^2b^2c^2 - 144\,\frac{I^3}{a_0^3}\right).$$

L'expression $a^2b^2c^2$, produit des carrés des différences des racines de a_x^4, est le discriminant de cette forme. On a donc définitivement

$$\Delta = \frac{288\, I}{a_0}\left(I^3 - 27\, J^2 - \frac{144\, I^3}{a_0^3}\right),$$

J étant l'invariant cubique de a_x^4.

11. Les propriétés qui précèdent (numéros 7 à 10) s'étendent facilement aux espaces à $2n$ dimensions ($n > 2$).

Les équations (15) et (19) représentent toujours respectivement la conique et la quadrique d'intersection du plan ABC ou de l'espace à trois dimensions ABCD avec l'hypersurface S_2 généralisée. Les coefficients sont, dans ce cas,

$$(aa) \equiv (f_{2n}, f_{2n})^{2n}, \quad (ab) \equiv (f_{2n}, f'_{2n})^{2n}.$$

Lorsque $n > 2$, on peut examiner en outre les intersections de S_2 avec les espaces linéaires à p dimensions ($3 < p \leqslant 2n - 1$); on aurait alors à étudier des hyperquadriques exprimées par des équations analogues aux formules (15) et (19), à $2n$ variables x au plus.

* * *

12. Les tangentes à la courbe C_4, en nombre simplement infini, constituent une surface. Les équations de celle-ci

s'obtiennent en éliminant le paramètre θ du point de contact entre les équations d'une telle droite, qui sont :

$$\begin{aligned} 6z_1 - 3z_2\theta + z_3\theta^2 &= 0, \\ 3z_2 - 4z_3\theta + 3z_4\theta^2 &= 0, \\ z_3 - 3z_4\theta + 6z_5\theta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Le lieu des tangentes est représenté analytiquement par deux des trois équations

$$\left.\begin{aligned} (8z_1z_3 - 3z_2^2)(9z_2z_4 - 4z_3^2) - 3(6z_1z_4 - z_2z_3)^2 &= 0, \\ 9(6z_2z_5 - z_3z_4)(6z_1z_4 - z_2z_3) - (36z_1z_5 - z_3^2)^2 &= 0, \\ (8z_3z_5 - 3z_4^2)(9z_2z_4 - 4z_3^2) - 3(6z_2z_5 - z_3z_4)^2 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

que nous allons remplacer par d'autres plus simples, équivalentes.

En posant

$$\begin{aligned} (S_2) &\equiv 12z_1z_5 - 3z_2z_4 + z_3^2, \\ (S_3) &\equiv 72z_1z_3z_5 + 9z_2z_3z_4 - 2z_3^3 - 27z_1z_4^2 - 27z_2^2z_5, \end{aligned}$$

les équations (24) s'écrivent

$$\begin{aligned} 4z_1(S_3) - 3(8z_1z_3 - 3z_2^2)(S_2) &= 0, \\ 2z_3(S_3) - 3(36z_1z_5 - z_3^2)(S_2) &= 0, \\ 4z_5(S_3) - 3(8z_3z_5 - 3z_4^2)(S_2) &= 0. \end{aligned}$$

On voit que le lieu des tangentes a pour équations :

$$(S_2) = 0, \quad (S_3) = 0.$$

L'hypersurface $(S_2) = 0$ vient d'être étudiée. Nous sommes ici amené à considérer une nouvelle hypersurface S_3, du troisième ordre, dont l'équation est

$$72z_1z_3z_5 + 9z_2z_3z_4 - 2z_3^3 - 27z_1z_4^2 - 27z_2^2z_5 = 0. \quad (25)$$

L'hypersurface S_3 *est le lieu de la double infinité des bisécantes*

de la courbe normale C_4; *elle a comme génératrices limites les tangentes à* C_4.

En effet, les équations de la bisécante unissant les points de paramètres θ_1 et θ_2 sont

$$\begin{Vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ \theta_1^4 & 4\theta_1^3 & 6\theta_1^2 & 4\theta_1 & 1 \\ \theta_2^4 & 4\theta_2^3 & 6\theta_2^2 & 4\theta_2 & 1 \end{Vmatrix} = 0.$$

En prenant pour ces équations les déterminants formés avec les lignes verticales de rangs 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5 de cette matrice, on a

$$\left.\begin{aligned} 12z_1 - 3z_2(\theta_1 + \theta_2) + 2z_3\theta_1\theta_2 &= 0, \\ 3z_2 - 2z_3(\theta_1 + \theta_2) + 3z_4\theta_1\theta_2 &= 0, \\ 2z_3 - 3z_4(\theta_1 + \theta_2) + 12z_5\theta_1\theta_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

L'élimination de θ_1 et θ_2 donne l'équation

$$\begin{vmatrix} 12z_1 & 3z_2 & 2z_3 \\ 3z_2 & 2z_3 & 3z_4 \\ 2z_3 & 3z_4 & 13z_5 \end{vmatrix} = 0,$$

qui est la formule (25). Il existe une double infinité de génératrices bisécantes correspondant à toutes les valeurs de θ_1 et θ_2.

Toute tangente se trouve simultanément sur S_2 et S_3; l'ensemble des équations de ces hypersurfaces représente donc le lieu de ces droites et est équivalent au système (24).

13. D'ordinaire, par un point A (formule 2) de l'espace à quatre dimensions, ne passe aucune bisécante à C_4.

La conditions pour qu'il en passe une est que les relations

$$\left.\begin{aligned} a_0\theta_1\theta_2 + a_1(\theta_1 + \theta_2) + a_2 &= 0, \\ a_1\theta_1\theta_2 + a_2(\theta_1 + \theta_2) + a_3 &= 0, \\ a_2\theta_1\theta_2 + a_3(\theta_1 + \theta_2) + a_4 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

déduites des équations (26) par la substitution aux variables des

coordonnées du point A, soient compatibles. Autrement dit, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette égalité est l'invariant cubique J de la forme f_4 relative au point A.

Donc, *la condition* $J = 0$ *exprime que, par le point* A *correspondant à la forme* f_4, *passe une bisécante de la courbe* C_4.

De plus, cette condition marque visiblement que le point A est sur S_3; donc, *l'hypersurface* S_3 *est le lieu des points de l'espace à quatre dimensions par lesquels passe une bisécante à la courbe normale de cet espace.*

Pour un tel point A, il n'existe qu'une seule bisécante. Car, la condition $J = 0$ étant satisfaite, les expressions (27) ne fournissent qu'un système de valeurs pour θ_1 et θ_2.

Par conséquent, *deux bisécantes génératrices de* S_3 *ne peuvent se rencontrer à moins que ce ne soit sur la courbe* C_4.

— Afin d'obtenir, sous une forme régulière, les équations de la bisécante passant par le point A, tirons les valeurs de $\theta_1\,\theta_2$ et $\theta_1 + \theta_2$ respectivement des deux premières équations (26), de la première et de la dernière, des deux dernières et substituons dans les formules (27). Nous aurons

$$\left.\begin{aligned} 12z_1(a_0a_2 - a_1^2) + 3z_2(a_0a_3 - a_1a_2) + 2z_3(a_1a_3 - a_2^2) &= 0, \\ 3z_2(a_0a_3 - a_1a_2) + 2z_3(a_0a_4 - a_2^2) + 3z_4(a_1a_4 - a_2a_3) &= 0, \\ 2z_3(a_1a_3 - a_2^2) + 3z_4(a_1a_4 - a_2a_3) + 12z_5(a_2a_4 - a_3^2) &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

ou, sous forme de déterminants,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 2z_3 & -3z_2 & 12z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 3z_4 & -2z_3 & 3z_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 12z_5 & -3z_4 & 2z_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces formules sont vérifiées pour les coordonnées du point A, si $J = 0$.

— On sait que l'invariant J, égalé à zéro, exprime la condition pour que les images des racines de la forme f_4 constituent un groupe harmonique.

Ainsi, *l'hypersurface* S_3 *est le lieu des points de l'espace à quatre dimensions tels que leurs hyperplans polaires, pris par rapport à* C_4, *marquent sur cette courbe une division harmonique.*

14. L'équation de l'espace linéaire à trois dimensions (a'), polaire du point A par rapport à l'hypersurface S_3, est

$$\left.\begin{aligned} &6z_1(a_0a_2 - a_1^2) + 3z_2(a_0a_3 - a_1a_2) + z_3(a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2) \\ &\quad + 3z_4(a_1a_4 - a_2a_3) + 6z_5(a_2a_4 - a_3^2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Si l'on y fait la substitution marquée par les formules (1), pour trouver ses points de rencontre avec la courbe normale, on obtient l'équation

$$(f_4, f_4)^2 = 0,$$

dont le premier membre est le hessien H_4 de la biquadratique $f_4 \equiv a_x^4$.

Ce résultat, combiné avec un autre obtenu précédemment, donne l'énoncé : *les hypersurfaces* S_2 *et* S_3 *permettent d'obtenir sur* C_4 *les images des racines de la forme biquadratique* f_4 *et de son hessien au moyen des hyperplans polaires du même point* A *pris par rapport à ces hypersurfaces.*

Remarquons en outre que S_2 seule fournit ces deux résultats; car l'équation (29) représente aussi l'espace polaire pris par rapport à S_2 d'un point A′ correspondant au hessien.

— Lorsque le point A est sur S_3, c'est-à-dire quand $J = 0$, l'équation (29) est celle de l'hyperplan tangent en A à S_3.

Lorsque le point A est pris sur une tangente, si A′ tombe sur la courbe C_4, l'espace (a) est osculateur en ce dernier point à C_4. Car alors $I = 0$, $J = 0$ et H_4 est une quatrième puissance

parfaite; ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que f_4 ait un facteur triple.

— Annotons le hessien ainsi

$$H_4 \equiv A_0x_1^4 + 2A_1x_1^3x_2 + A_2x_1^2x_2^2 + 2A_3x_1x_2^3 + A_4x_2^4;$$

le point A′ aura pour coordonnées A_4, $-2A_3$, A_2, $-2A_1$, A_0.

La condition $J = 0$, qui s'écrit aussi

$$(f_4, H_4)^4 = 0,$$

exprime que l'hyperplan (a′) *passe par le point* A *et que* (a) *passe par* A′.

Elle exprime encore que (a′) *figure sur* C_4 *un quaterne d'éléments de l'involution* I_3^4 *ayant pour points quadruples les racines de* f_4. *Elle marque enfin que la droite* AA′ *est commune aux hyperplans* (a) *et* (a′).

Les équations de cette droite conduisent à une constatation assez curieuse. Elles sont

$$\begin{Vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ a_4 & -4a_3 & 6a_2 & -4a_1 & a_0 \\ A_4 & -2A_3 & A_2 & -2A_1 & A_0 \end{Vmatrix} = 0.$$

Retenons de cette formule les déterminants qui renferment les colonnes de rangs 1, 2, 3, ou 2, 3, 4, ou 3, 4, 5. Ces équations correspondent respectivement aux dérivées

$$\frac{1}{30}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}, \quad \frac{1}{30}\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \frac{1}{30}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}$$

du covariant du sixième ordre $(f_4, H_4)^1$ de la forme f_4, multipliées par x_1^2, x_1x_2, x_2^2, au moyen de la substitution déjà employée :

$$x_1^4 : 4x_1^3x_2 : \ldots x_2^4 = z_1 : z_2 : \ldots z_5.$$

— Avant de continuer l'étude de l'hypersurface S_3, nous ferons une nouvelle remarque sur le hessien H_4.

Par chaque tangente à C_4, passe une infinité d'ordre supérieur de plans tangents à la courbe; ils peuvent être ou non encore sécants.

Le point A et chacune de ces droites déterminent un plan tangent. Ceux dont les points de contact ont pour paramètres les racines de f_4 jouissent d'une propriété signalée au numéro 5, 3°, quand le point A se trouve sur S_2

Les plans tangents aux points figurant les racines du hessien et passant par A *sont encore sécants à la courbe.*

En effet, le plan tangent et sécant respectivement aux points de paramètres θ_1 et θ_2 a pour équations

$$(12z_1 - 6z_2\theta_1 + 2z_3\theta_1^2) - \theta_2(3z_2 - 4z_3\theta_1 + 3z_4\theta_1^2) = 0,$$
$$(3z_2 - 4z_3\theta_1 + 3z_4\theta_1^2) - \theta_2(2z_3 - 6z_4\theta_1 + 12z_5\theta_1^2) = 0.$$

S'il renferme le point A, on a les conditions

$$(a_4 + 2a_3\theta_1 + a_2\theta_1^2) + \theta_2(a_3 + 2a_2\theta_1 + a_1\theta_1^2) = 0,$$
$$(a_3 + 2a_2\theta_1 + a_1\theta_1^2) + \theta_2(a_2 + 2a_1\theta_1 + a_0\theta_1^2) = 0.$$

En éliminant θ_2 et en posant $\theta_1 \equiv \frac{x_1}{x_2}$ dans le résultat, on a le hessien de f_4, ce qui vérifie l'énoncé ci-dessus.

L'élimination de θ_1 donne une équation du quatrième ordre en θ_2 relative aux intersections.

Les contacts marquent les points doubles, les intersections figurent les points de ramification de l'involution cubique de premier rang qui serait caractérisée par l'ensemble des équations (7). C'est ce qui résulte immédiatement de la définition de ces points.

Les plans que nous venons de rencontrer ont déjà été signalés au numéro 3, dans l'étude de l'hyperquadrique Σ_2.

15. L'équation (29) de l'hyperplan (a'), multipliée par deux, s'écrit

$$[12z_1(a_0a_2 - a_1^2) + 3z_2(a_0a_3 - a_1a_2) + 2z_3(a_1a_3 - a_2^2)]$$
$$+ [3z_2(a_0a_3 - a_1a_2) + 2z_3(a_0a_4 - a_2^2) + 3z_4(a_1a_4 - a_2a_3)]$$
$$+ [2z_3(a_1a_3 - a_2^2) + 3z_4(a_1a_4 - a_2a_3) + 12z_5(a_2a_4 - a_3^2)] = 0,$$

expression qui est la somme des trois équations (28).

Donc, *l'espace linéaire tangent au point* A *à l'hypersurface* S_5 *renferme tout entière la bisécante à* C_4 *passant par ce point.*

Nous allons démontrer en outre que *tout espace linéaire à trois dimensions, tangent en un point à l'hypersurface* S_5, *est tangent tout le long de la génératrice, bisécante de* C_4, *passant par ce point.*

En effet, un point variable de la bisécante unissant les appuis de paramètres θ_1 et θ_2 a pour coordonnées

$$\theta_1^4 + k\theta_2^4, \quad 4(\theta_1^3 + k\theta_2^3), \quad 6(\theta_1^2 + k\theta_2^2), \quad 4(\theta_1 + k\theta_2), \quad 1 + k,$$

et il est situé sur S_5.

L'équation de l'hyperplan tangent à S_5 en ce point s'exprime tous calculs faits, par la formule

$$\begin{aligned} k(\theta_1 - \theta_2)^2[6z_1 - 3z_2(\theta_1 + \theta_2) + z_3(\theta_1^2 + \theta_2^2 + 4\theta_1\theta_2) \\ - 3z_4\theta_1\theta_2(\theta_1 + \theta_2) + 6z_5\theta_1^2\theta_2^2] = 0, \end{aligned}$$

qui, après suppression du facteur $k(\theta_1 - \theta_2)^2$ et multiplication par deux, s'écrit

$$\left.\begin{aligned} [12z_1 - 3z_2(\theta_1 + \theta_2) + 2z_3\theta_1\theta_2] - (\theta_1 + \theta_2)[3z_2 - 2z_3(\theta_1 + \theta_2) + 3z_4\theta_1\theta_2] \\ + \theta_1\theta_2[2z_3 - 3z_4(\theta_1 + \theta_2) + 12z_5\theta_1\theta_2] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Cette expression indique que l'hyperplan passe par la droite bisécante répondant aux équations (26), résultat rencontré ci-dessus. Étant indépendante de k, elle démontre que l'hyperplan considéré est tangent à S_5 en tout point de cette droite.

— L'équation précédente peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} (6z_1 - 3z_2\theta_1 + z_3\theta_1^2) - \theta_2(3z_2 - 4z_3\theta_1 + 3z_4\theta_1^2) \\ + \theta_2^2(z_3 - 3z_4\theta_1 + 6z_5\theta_1^2) = 0; \end{aligned}$$

on établit ainsi que l'hyperplan tangent à S_5 passe par les tangentes à la courbe normale aux points d'appui de la bisécante. Ces points d'appui sont donc les seules intersections de l'hyperplan et de la courbe normale.

Ainsi, *l'espace linéaire tangent en* A *à* S_3 *est bitangent à* C_4 *aux appuis de la bisécante qu'on peut mener à cette courbe par le point* A.

L'hypersurface S_3 *est l'enveloppe des espaces linéaires à trois dimensions bitangents à* C_3.

Nous avons en outre une démonstration géométrique de la propriété suivante :

Lorsque l'invariant J *de la forme* f_4 *est nul, le hessien* H_4 *de cette forme est le carré d'une forme quadratique.*

— En posant $\theta_1 \equiv \theta_2$ dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$z_1 - \theta_1 z_2 + \theta_1^2 z_3 - \theta_1^3 z_4 + \theta_1^4 z_5 = 0,$$

formule qui représente l'espace surosculateur à C_4 au point de paramètre θ_1. Cet espace est donc tangent à S_3 le long de la tangente à la courbe normale en ce point.

Or, c'est aussi l'espace tangent à S_2 en un point de C_4; donc, *les hypersurfaces* S_2 *et* S_3 *sont « tangentes » l'une à l'autre le long de la courbe normale* C_4.

— Enfin l'équation (30) est encore identique à la formule

$$[12z_1 - 5z_2(2\theta_1 + \theta_2) + 2z_3(\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2) - 3z_4\theta_1^2\theta_2]$$
$$- \theta_2[3z_2 - 2z_3(2\theta_1 + \theta_2) + 3z_4(\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2) - 12z_5\theta_1^2\theta_2] = 0.$$

Les expressions placées entre crochets, égalées à zéro, représentent le plan tangent à C_4 au point de paramètre θ_1 et sécant au point de paramètre θ_2.

Ainsi, *l'hyperplan tangent en* A *à* S_3 *contient les plans tangents à* C_4 *aux appuis de la bisécante.*

16. Pour que l'espace à trois dimensions

$$(a) \equiv a_0 z_1 + a_1 z_2 + a_2 z_3 + a_3 z_4 + a_4 z_5 = 0$$

soit, de son côté, espace polaire du point A par rapport à S_3, il faut que cet espace ne diffère pas de celui que représente

l'équation (29). C'est-à-dire que l'on doit avoir, avec les notations du numéro 14,

$$\frac{a_0}{A_0} = \frac{2a_1}{A_1} = \frac{6a_2}{A_2} = \frac{2a_3}{A_3} = \frac{a_4}{A_4}.$$

Mais ces rapports marquent aussi les conditions nécessaires pour que la forme f_4 renferme deux facteurs linéaires élevés au carré.

Par suite, *pour qu'un espace à trois dimensions soit simultanément polaire par rapport à* S_2 *et à* S_3, *il doit être doublement tangent à* C_4.

Les rapports précédents donnent dix équations qui se ramènent à deux conditions distinctes quand aucune des quantités a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 n'est nulle.

Ces conditions peuvent s'écrire :

$$3a_0a_1a_2 - a_0^2a_3 - 2a_1^3 = 0,$$
$$3a_1a_2a_4 - a_0a_3a_4 - 2a_1a_3^2 = 0.$$

Elles expriment que le point A se trouve sur la surface répondant aux équations

$$4z_3z_4z_5 - 8z_2z_5^2 - z_4^3 = 0,$$
$$4z_1z_3z_4 - 8z_1z_2z_5 + z_2^2z_4 = 0.$$

Ainsi, *les espaces polaires communs par rapport à* S_2 et à S_3 *doivent avoir leur pôle sur une surface du neuvième ordre.*

17. Considérons l'involution I^4 ayant pour équation

$$a_0\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 + a_1\Sigma\theta_1\theta_2\theta_3 + a_2\Sigma\theta_1\theta_2 + a_3\Sigma\theta_1 + a_4 = 0.$$

Ses points quadruples sont marqués sur C_4 par les intersections de cette courbe et de l'hyperplan (a); ses quaternes de points, par les intersections de C_4 et de tous les hyperplans passant par A.

L'équation précédente peut s'écrire

$$\theta_3\theta_4[a_0\theta_1\theta_2 + a_1(\theta_1 + \theta_2) + a_2] + (\theta_3 + \theta_4)[a_1\theta_1\theta_2 + a_2(\theta_1 + \theta_2) + a_3] + [a_2\theta_1\theta_2 + a_3(\theta_1 + \theta_2) + a_4] = 0.$$

Si le point A est quelconque, cette expression démontre que *lorsqu'on fait passer par le point* A *et le couple de points fixes, de paramètres* θ_1 *et* θ_2, *une infinité d'espace linéaires à trois dimensions, les intersections restantes avec* C_4 *donnent les couples d'une involution quadratique* I_1^2.

En comparant aux expressions (27), on voit en outre que, si le point A est situé sur l'hypersurface S_3, c'est-à-dire si J égale zéro, ou encore si les points A, θ_1, θ_2 sont en ligne droite, le couple $(\theta_3\theta_4)$ est indéterminé.

L'involution I_3^4 *dont le point central est sur une bisécante de* C_4 *a comme éléments neutres le couple des points d'appui de cette droite.*

En éliminant les paramètres θ_3 et θ_4 entre l'équation ci-dessus et les équations d'une bisécante, on obtient le lieu des bisécantes marquant par leurs appuis sur C_4 les couples de l'involution I_1^2 considérée.

Sous une forme générale, ces équations s'écrivent

$$\begin{aligned}
3b_0(8z_1z_3 - 3z_2^2) + 6b_1(6z_1z_4 - z_2z_3) + b_2(9z_2z_4 - 4z_3^2) &= 0,\\
3b_0(6z_1z_4 - z_2z_3) + 2b_1(36z_1z_3 - z_3^2) + 3b_2(6z_2z_3 - z_3z_4) &= 0,\\
b_0(9z_2z_4 - 4z_3^2) + 6b_1(6z_2z_3 - z_3z_4) + 3b_2(8z_3z_3 - 3z_4^2) &= 0;
\end{aligned}$$

deux quelconques d'entre elles représentent le lieu cherché.

Mais l'élimination de θ_3 et θ_4 entre les équations de la bisécante donne la relation $(S_3) = 0$.

Donc, *l'hypersurface* S_3 *contient toutes les surfaces réglées dont les génératrices marquent sur* C_4 *les couples d'involutions quadratiques.*

Chacune de ces réglées a deux génératrices seulement tangentes à C_4; elles correspondent aux éléments doubles de l'invo-

lution I_1^2; elles appartiennent à l'intersection de la surface et des hypersurfaces S_2 et S_3.

Parmi les réglées qui rentrent dans les équations ci-dessus, il faut remarquer les cônes inscrits à C_4; leurs équations s'obtiennent en faisant dans les précédentes la substitution

$$b_0 : b_1 : b_2 = 1 : -\theta : \theta^2,$$

θ étant le paramètre du sommet.

— Signalons l'analogie qui existe entre la représentation de l'involution I_2^3 sur une cubique gauche de l'espace euclidien et la représentation qui précède de l'involution I_3^4, lorsque le point central de cette dernière est sur l'hypersurface S_3.

La seule bisécante que l'on puisse mener à la cubique gauche par le point central de l'involution I_2^3 marque, sur cette courbe, par ses appuis, les images des racines du hessien des points triples; ces appuis donnent *les* éléments neutres de l'involution (*).

De même, la bisécante passant par le point central de l'involution I_3^4 donne sur C_4 les images des racines du hessien des points quadruples (supposés ici constituer une division harmonique); ce couple de points donne *des* éléments neutres de cette involution.

Cette dernière observation a lieu pour l'involution I_{2n-1}^{2n}, le hessien étant remplacé par une fonction invariante que nous définirons dans la suite.

18. Les propriétés précédentes de l'hypersurface S_3 et de l'invariant J se généralisent avec facilité dans l'espace E_{2n} à $2n$ dimensions, $n > 2$. On obtient :

Le lieu des espaces linéaires à $n-1$ dimensions rencontrant

(*) D'après notre mémoire intitulé : *Sur la représentation géométrique dans l'espace des formes quadratiques et cubiques binaires.* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 3e série, t. V, 1904.)

la courbe normale C_{2n} *de l'espace* E_{2n} *en* n *points est une hypersurface* S_{n+1} *qui contient, comme espaces générateurs limites, les espaces à* n — 1 *dimensions tangents à* C_{2n} *en* n *points coïncidents.*

L'hypersurface S_{n+1} *est le lieu des points de l'espace* E_{2n} *par lesquels on peut mener un espace à* n — 1 *dimensions,* n *fois sécant à la courbe normale.*

Les espaces générateurs limites appartiennent simultanément aux hypersurfaces S_{n+1} *et* S_2 (celle-ci étant définie au n° 2).

L'invariant J, *d'ordre* n + 1, *obtenu en éliminant les variables entre les dérivées partielles d'ordre* n *de la forme binaire* $f_{2n} \equiv a_x^{2n}$ *exprime, quand il s'annule, que le point* A *correspondant à la forme* f_{2n} *appartient à l'hypersurface* S_{n+1}.

L'espace linéaire (a') *à* 2n — 1 *dimensions, polaire du point* A *par rapport à* S_{n+1}, *marque sur la courbe normale les images des racines d'un covariant* F *de la forme* f_{2n}. *Ce covariant est de degré* 2n *par rapport aux variables, d'ordre* n *par rapport aux coefficients.*

Les images de ces racines sont encore obtenues par les contacts des espaces linéaires à n *dimensions,* n — 1 *fois encore sécants à la courbe, que l'on peut mener par le point* A.

L'invariant J est l'invariant quadratique simultané de f_{2n} et de F.

Lorsque J = 0, *l'espace polaire* (a') *est tangent à* S_{n+1} *suivant l'espace linéaire à* n — 1 *dimensions générateur de l'hypersurface et passant par ce point. Il est tangent à la courbe normale en chacun des* n *points où cet espace linéaire générateur rencontre* C_{2n}.

Lorsque J = 0, *le covariant* F *correspondant à l'espace linéaire tangent à* S_{n+1} *est le carré d'une forme binaire d'ordre* n.

L'hypersurface S_{n+1} *est l'enveloppe des espaces à* 2n — 1 *dimensions tangents en* n *points à la courbe normale.*

L'hypersurface S_{n+1} *est le lieu des variétés constituées par les espaces à* n *dimensions marquant sur la courbe normale les groupes des involutions d'ordre* n *et de rang* n — 1.

On peut encore ajouter :

Le groupe des $2n$ *points correspondant à la forme* f_{2n} *est apolaire avec lui-même quand l'espace* (a) *qui le marque sur* C_{2n} *est tangent à* S_2; car alors l'invariant quadratique I est nul.

Le groupe des $2n$ *points correspondant à la forme* F *est apolaire avec le groupe relatif à la forme* f_{2n} *si l'espace linéaire* (a') *qui le marque sur* C_{2n} *est tangent à* S_{n+1}; car alors J, invariant quadratique simultané de f_{2n} et F, est nul.

La démonstration de plusieurs des propriétés ci-dessus résulte de la remarque suivante.

Prendre l'espace polaire du point A par rapport à S_{n+1}, c'est développer le déterminant répondant à cette hypersurface suivant les mineurs de tous les éléments et remplacer, dans ces mineurs, les variables par les coefficients correspondants de la forme f_{2n}.

L'espace polaire (a') renferme l'espace à $n-1$ dimensions générateur de S_{n+1} qui passe par le point A; car chacune des équations de ce dernier espace n'est que le développement de l'équation de S_{n+1} suivant les mineurs des éléments d'une ligne, les variables étant remplacées dans les mineurs par les coefficients de f_{2n}.

— Voici, pour le surplus, les principales expressions analytiques relatives à l'espace à six dimensions; elles donnent la forme générale des raisonnements.

Le lieu S_4 des plans trisécants à la courbe normale C_6 qui a pour équations

$$z_1 : z_2 : z_3 : \ldots z_7 = x_1^6 : 6x_1^5x_2 : 15x_1^4x_2^2 : \ldots : x_2^6, \qquad (31)$$

est représenté par la formule :

$$\begin{vmatrix} 60z_7 & 10z_6 & 4z_5 & 3z_4 \\ 10z_6 & 4z_5 & 3z_4 & 4z_3 \\ 4z_5 & 3z_4 & 4z_3 & 10z_2 \\ 3z_4 & 4z_3 & 10z_2 & 60z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (32)$$

Le point A, ayant pour coordonnées les valeurs suivantes, qui répondent aux coefficients de la forme $f_6 \equiv a_x^6$,

$$z_1 : z_2 : z_3 : \cdots z_7 = a_6 : -6a_5 : 15a_4 : \cdots a_0,$$

est sur l'hypersurface S_4, si l'on a

$$J \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 0. \qquad (33)$$

Par ce point, on peut mener un seul plan trisécant à C_6 quand la condition $J = 0$ est réalisée. Les équations de ce plan s'expriment par la formule (33) en y remplaçant successivement chaque ligne horizontale par les éléments correspondants du déterminant (32), alternativement changés de signes.

La somme des quatre équations ainsi obtenues représente l'espace linéaire à cinq dimensions polaire du point A par rapport à C_6. Si la condition $J = 0$ est remplie, il est l'espace tangent au point A et la forme de son équation montre qu'il passe par le plan trisécant considéré.

Le covariant correspondant à cet espace polaire s'exprime en faisant, dans l'équation de celui-ci, la substitution marquée par les formules (31). Il se représente ici symboliquement par l'une ou l'autre des expressions équivalentes

$$[f_6, (f_6, f_6)^2]^4,$$
$$[f_6, (f_6, f_6)^4]^2.$$

— La propriété géométrique ci-dessus nous permet de trouver une expression du covariant F, qui est générale.

L'un des quatre déterminants dont ce covariant est la somme est, abstraction faite d'un facteur numérique commun, égal à

$$D \equiv x_1^3 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ -x_2^3 & x_1x_2^2 & -x_1^2x_2 & x_1^3 \end{vmatrix}.$$

Par l'addition des colonnes, multipliées par x_1 ou x_2, on le ramène à celui-ci :

$$x_1^3 \begin{vmatrix} a_0x_1 + a_1x_2 & a_1x_1 + a_2x_2 & a_2x_1 + a_3x_2 \\ a_1x_1 + a_2x_2 & a_2x_1 + a_3x_2 & a_3x_1 + a_4x_2 \\ a_2x_1 + a_3x_2 & a_3x_1 + a_4x_2 & a_4x_1 + a_5x_2 \end{vmatrix}.$$

La somme des quatre déterminants considérés est alors le développement, par les mineurs de la première ligne, de

$$\begin{vmatrix} x_2^3 & -x_2^2x_1 & x_2x_1^2 & -x_1^3 \\ a_0x_1 + a_1x_2 & a_1x_1 + a_2x_2 & a_2x_1 + a_3x_2 & a_3x_1 + a_4x_2 \\ a_1x_1 + a_2x_2 & a_2x_1 + a_3x_2 & a_3x_1 + a_4x_2 & a_4x_1 + a_5x_2 \\ a_2x_1 + a_3x_2 & a_3x_1 + a_4x_2 & a_4x_1 + a_5x_2 & a_5x_1 + a_6x_2 \end{vmatrix}.$$

Enfin celui-ci, à son tour, de même forme que D, s'écrit

$$\begin{vmatrix} a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 & a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 & a_2x_1^2 + 2a_3x_1x_2 + a_4x_2^2 \\ a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 & a_2x_1^2 + 2a_3x_1x_2 + a_4x_2^2 & a_3x_1^2 + 2a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 \\ a_2x_1^2 + 2a_3x_1x_2 + a_4x_2^2 & a_3x_1^2 + 2a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 & a_4x_1^2 + 2a_5x_1x_2 + a_6x_2^2 \end{vmatrix}.$$

Nous voyons donc que *le covariant* F *s'exprime par un déterminant à* n — 1 *lignes, dont les éléments sont les dérivées d'ordre* n — 2 *de la forme* f_{2n}.

— Pour établir que l'espace tangent au point A de S_4 est tangent suivant tout le plan générateur qui passe par ce point, exprimons les coordonnées de celui-ci en fonction des paramètres des intersections du plan et de la courbe normale par les formules suivantes :

$$z_1 : z_2 : \ldots z_7 = (\theta_1^6 + k\theta_2^6 + k'\theta_3^6) : 6(\theta_1^5 + k\theta_2^5 + k'\theta_3^5) : \ldots : (1 + k + k').$$

L'équation de l'espace à cinq dimensions tangent en ce point, après suppression du facteur

$$60^3kk' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 \end{vmatrix}^2$$

commun à tous les termes, prend la forme

$$\begin{aligned}(60z_1 - 10z_2\Sigma\theta_1 + 4z_3\Sigma\theta_1\theta_2 - 3z_4\theta_1\theta_2\theta_3)\\ - \Sigma\theta_1[10z_2 - 4z_3\Sigma\theta_1 + 3z_4\Sigma\theta_1\theta_2 - 4z_5\theta_1\theta_2\theta_3]\\ + \Sigma\theta_1\theta_2[4z_3 - 3z_4\Sigma\theta_1 + 4z_5\Sigma\theta_1\theta_2 - 10z_6\theta_1\theta_2\theta_3]\\ - \theta_1\theta_2\theta_3[3z_4 - 4z_5\Sigma\theta_1 + 10z_6\Sigma\theta_1\theta_2 - 60z_7\theta_1\theta_2\theta_3] = 0;\end{aligned}$$

ou bien, à un facteur numérique près, celle-ci :

$$\begin{aligned}2[15z_1 - 5z_2\theta_3 + z_3\theta_3^2] - (\theta_1 + \theta_2)[10z_2 - 8z_5\theta_3 + 3z_4\theta_3^2]\\ + (\theta_1^2 + \theta_2^2 + 4\theta_1\theta_2)[2z_3 - 3z_4\theta_3 + 2z_5\theta_3^2]\\ - \theta_1\theta_2(\theta_1 + \theta_2)[3z_4 - 8z_5\theta_3 + 10z_6\theta_3^2]\\ + 2\theta_1^2\theta_2^2[z_5 - 5z_6\theta_3 + 15z_7\theta_3^2] = 0.\end{aligned}$$

Ces relations, indépendantes de k et k', montrent que l'espace envisagé est tangent en tout point du plan.

La première prouve en outre que cet espace contient le plan trisécant considéré, car les expressions entre crochets, égalées à zéro, sont les équations de ce plan.

La dernière, que cet espace contient les tangentes aux points θ_3, θ_2, θ_1 à la courbe C_6, puisque les expressions entre crochets donnent les équations de la tangente au point de paramètre θ_3.

L'espace est donc simplement tangent aux points de paramètres θ_1, θ_2 et θ_3, et *la forme* F *est un carré si* $J = 0$.

L'équation précédente pourrait encore être décomposée de façon à montrer que l'espace tangent renferme les deux plans tangents à C_6 en θ_1 et sécants respectivement aux points de paramètres θ_2 et θ_3; ou bien, de manière à prouver qu'il contient aussi l'espace linéaire à trois dimensions tangent à C_6 en θ_1 et sécant en θ_2 et θ_3.

19. Nous allons actuellement, pour étudier l'hypersurface S_3 de plus près, en faire des sections par une droite, un plan, un hyperplan comme nous l'avons fait pour S_2. Cependant, afin d'être bref, nous n'envisagerons que les hypothèses qui nous paraissent intéressantes.

Ces nouvelles remarques reposent sur l'interprétation des invariants du troisième ordre du système de deux ou de trois formes biquadratiques binaires. Elles peuvent être facilement généralisées.

Au moyen des formules (10) du numéro 5, nous trouvons que le paramètre k des points d'intersection de S_3 et de la droite AB sont donnés par les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_0 + kb_0 & a_1 + kb_1 & a_2 + kb_2 \\ a_1 + kb_1 & a_2 + kb_2 & a_3 + kb_3 \\ a_2 + kb_2 & a_3 + kb_3 & a_4 + kb_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les points A et B correspondent aux formes f_4 et f'_4. Si les symboles H_4 et H'_4 désignent respectivement les hessiens de ces formes, cette équation peut s'écrire

$$(f_4, H_4)^4 + (f'_4, H_4)^4 k + (f_4, H'_4)^4 k^2 + (f'_4, H'_4)^4 k^3 = 0, \qquad (34)$$

les transvections étant ici réduites à leurs parties littérales.

L'un des coefficients du milieu de cette relation, égalé à zéro, par exemple

$$(f'_4, H_4)^4 = 0,$$

exprime la condition pour que le point B soit dans l'espace polaire du point A pris par rapport à S_3; il exprime aussi que le point A est sur la seconde polaire du point B relativement à cette hypersurface. D'ailleurs, quand le coefficient de k^3 ou le terme indépendant est nul, le point B ou le point A est sur S_3.

Il en résulte que, *si le point* B *est un point de la surface d'intersection de* S_3 *et de l'hyperplan polaire du point quelconque* A, *le segment* AB *est divisé harmoniquement par l'hypersurface* S_3.

Des conclusions analogues se présenteraient si le point A était sur la surface d'intersection de S_3 et de la seconde polaire de ce point par rapport à S_3. Ces remarques ont leur source dans les propriétés générales des polaires.

— Pour que la droite AB soit sur l'hypersurface S_3, les quatre coefficients doivent être simultanément nuls. Les points

A et B doivent donc se trouver sur S_3; de plus, les points B et A doivent appartenir respectivement aux hyperplans (a) et (b) tangents en A et B à S_3.

Ces conditions se résument ainsi : *pour qu'une droite* AB *fasse partie de l'hypersurface* S_3, *elle doit appartenir à l'intersection des hyperplans respectivement tangents en* A *et* B *à l'hypersurface.* La réciproque est vraie.

On aperçoit que ce théorème est un cas particulier d'une propriété des réglées étendue à l'hyperespace.

Les droites AB définies ainsi sont bisécantes à C_4 ou s'appuient sur deux bisécantes.

— Égalons à zéro le discriminant de la forme cubique qui constitue le premier membre de la relalion (34) et, dans l'expression obtenue, faisons la substitution

$$b_4 : b_3 : b_2 : b_1 : b_0 = 12z_1 : -3z_2 : 2z_3 : -3z_4 : 12z_5.$$

Nous trouvons ainsi l'équation d'*une hypersurface, lieu de toutes les droites passant par le point* A *et tangentes à* S_3.

Ce lieu est évidemment un cône; son équation est du sixième ordre par rapport aux variables et aux coefficients.

En représentant la formule (34) par

$$A_0 + A_1k + A_2k^2 + A_3k^3 = 0,$$

l'équation du cône est

$$(A_0A_2 - A_1^2)(A_1A_3 - A_2^2) - (A_0A_3 - A_1A_2)^2 = 0.$$

Si le point A est sur S_3, le coefficient A_0 est nul et l'équation se ramène à

$$A_3A_1^3 = 0.$$

Le cône est décomposable; il renferme l'hypersurface S_3 et l'hyperplan polaire du point B, compté trois fois.

L'intersection du cône et de l'hypersurface S_3 s'obtiendra en posant $A_3 = 0$; l'équation donne alors

$$A_0A_2^3 = 0.$$

La surface d'intersection de S_3 *et du cône de sommet* A *est donc commune à* S_3 *et à la seconde polaire,* $A_2 = 0$, *du point* A *par rapport à* S_3.

Ceci rentre encore dans les propriétés générales des polaires.

20. Nous avons cherché l'*hypersurface hessienne* de S_3; elle est, comme on le sait, le lieu des points dont les hyperquadriques polaires sont des cônes.

En éliminant les variables entre les dérivées partielles de l'équation de l'hyperquadrique polaire

$$\left.\begin{aligned} &a_0(8z_1z_3 - 3z_2^2) + 4a_1(6z_1z_4 - z_2z_3) + 2a_2(24z_1z_5 + 3z_2z_4 - 2z_3^2) \\ &\quad + 4a_3(6z_2z_5 - z_3z_4) + a_4(8z_3z_5 - 3z_4^2) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

on obtient la relation :

$$\begin{vmatrix} & & a_0 & 3a_1 & 3a_2 \\ & -3a_0 & -2a_1 & 3a_2 & 6a_3 \\ a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & a_4 \\ 6a_1 & 3a_2 & -2a_3 & -3a_4 & \\ 3a_2 & 3a_3 & a_4 & & \end{vmatrix} = 0.$$

Celle-ci, tous calculs faits, se réduit à

$$2\,\mathrm{IJ} - 3a_2(a_0a_2^2a_4 - 4a_1^2a_3^2 + 4a_1a_2^2a_5 - a_2^4) = 0,$$

expression dans laquelle, pour avoir l'équation de l'hypersurface hessienne, il reste à remplacer les a par des z au moyen des rapports (2).

La dernière formule montre qu'elle ne correspond pas immédiatement aux invariants de la biquadratique f_4.

— En calculant l'équation de l'hyperplan polaire du point B par rapport à l'hyperquadrique polaire représentée par la formule (35), on trouve :

$$\left.\begin{aligned} &6z_1(a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0) + 3z_2(a_0b_3 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0) \\ &\quad + z_3(a_0b_4 + 2a_1b_3 - 6a_2b_2 + 2a_3b_1 + a_4b_0) \\ &\quad + 3z_4(a_1b_4 - a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1) + 6z_5(a_2b_4 - 2a_3b_3 + a_4b_2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

au moyen de la substitution (1), cette formule se ramène à l'expression symbolique

$$(f_4, f'_4)^2 = 0.$$

Nous obtenons ainsi l'interprétation de la seconde transvection de deux formes biquadratiques f_4 et f'_4, et les images sur C_4 des racines de cette fonction invariante.

On comprend, d'après cela, ce que signifient géométriquement, dans nos hypothèses, les autres covariants biquadratiques du système

$$(f_4, H'_4)^2, \quad (H_4, f'_4)^2, \quad (H_4, H'_4)^2.$$

On trouve de même, en général, au moyen des hypersurfaces S_{n+1} et de ses diverses polaires par rapport à un même point A, l'expression géométrique de nombreux covariants du système des formes f_{2n} et F combinées avec d'autres formes analogues f'_{2n}, F'. Il suffit de faire intervenir les points correspondant à ces formes.

— Par les relations (14), substituées aux variables dans l'équation (35), on obtient l'équation de la conique d'intersection du plan ABC et de l'hyperquadrique polaire.

En désignant par f_4, f'_4, f''_4, H_4, H'_4, H''_4 les formes qui correspondent aux points A, B et C et leurs hessiens, l'équation de cette conique peut s'écrire symboliquement :

$$3Jx_1^2 + (f_4, H'_4)^4 x_2^2 + (f_4, H''_4)^4 x_3^2$$
$$+ 2(f'_4, H_4)^4 x_1 x_2 + 2(f''_4, H_4)^4 x_1 x_3 + [f_4, (f'_4, f''_4)^2]^4 x_2 x_3 = 0.$$

On voit facilement quelle est la signification des relations

$$J = 0, \quad (f_4, H'_4)^4 = 0, \quad [f_4, (f'_4, f''_4)^2]^4 = 0.$$

La première marque que le point A est sur l'hypersurface S_3 et, par conséquent, que l'hyperquadrique polaire est tangente en ce point à S_3. La seconde, que le point A se trouve sur l'hyperplan polaire de S_3 par rapport au point B. La troisième est

l'expression (36) où l'on aurait remplacé les coordonnées courantes par les coordonnées du point C; elle est symétrique par rapport aux trois formes qui y entrent et peut donc encore s'écrire

$$[f'_4, (f_4, f''_4)^2]^4 = 0,$$
$$[f''_4, (f_4, f'_4)^2]^4 = 0;$$

elle exprime que le point C est sur l'hyperplan polaire du point B pris par rapport à l'hyperquadrique polaire répondant à l'équation (35) Les rôles des points A, B et C sont permutables.

Lorsque, simultanément, ces conditions sont remplies, le plan ABC est situé tout entier sur l'hyperquadrique polaire du point A, tangente en ce point S_3.

La forme de l'équation (35) montre que l'hyperquadrique polaire est de même nature que les hypersurfaces Σ_2 et Σ'_2 étudiées au numéro 3.

21. La courbe cubique K_3, intersection de l'hypersurface S_3 et du plan ABC, peut s'étudier sur l'équation (*)

$$\begin{vmatrix} a_0x_1 + b_0x_2 + c_0x_3 & a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 & a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \\ a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 & a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 \\ a_2x_2 + b_2x_2 + c_2x_3 & a_3x_2 + b_3x_2 + c_3x_3 & a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

formule qui découle de l'équation de S_3 au moyen de la substitution marquée par les relations (14).

(*) Cette équation est le discriminant du réseau de coniques dont l'équation est

$$K_a x_1 + K_b x_2 + K_c x_3 = 0,$$

égalité dans laquelle nous posons

$$K_a \equiv a_0X_1^2 + a_2X_2^2 + a_4X_3^2 + 2a_3X_2X_3 + 2a_2X_1X_3 + 2a_1X_1X_2,$$
$$K_b \equiv b_0X_1^2 + \ldots, \quad K_c \equiv c_0X_1^2 + \ldots,$$

et pourrait être étudiée comme telle.

En désignant par $(a_0\ b_1\ c_2)$ le déterminant du troisième ordre qui a pour éléments de sa première ligne a_0, b_1 et c_2, l'équation précédente peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma x_1^3(a_0a_1a_2) + \Sigma x_1^2x_2[(a_0a_1b_2) + (a_0b_1a_2) + (b_0a_1a_2)]\\ &+x_1x_2x_3[(a_0b_1c_2)+(a_0c_1b_2)+(b_0a_1c_2)+(c_0a_1b_2)+(b_0c_1a_2)+(c_0b_1a_2)]=0,\end{aligned}\right\}\ (37)$$

ou, symboliquement,

$$\Sigma x_1^3 J + \Sigma x_1^2x_2(H_1, f_1')^1 + x_1x_2x_3[f_1, (f_1', f_1'')^2]^1 = 0.$$

Les divers coefficients de cette équation ont été interprétés au numéro 20.

Lorsqu'ils sont simultanément nuls, les points A, B et C appartiennent tous trois aux espaces tangents en ces points à S_3 et les hyperquadriques polaires de ces points sont ensemble dans le cas examiné ci-dessus.

Nous en concluons ce théorème :

Pour qu'un plan ABC *se trouve tout entier sur l'hypersurface* S_3 *il doit être commun aux hyperquadriques polaires et aux hyperplans polaires, tangents aux points* A, B *et* C *à* S_3.

— Voici des remarques relatives à certaines situations particulières du plan ABC.

1° Lorsque l'un des points, C par exemple, est situé sur la courbe C_4 les deux autres points étant quelconques, les termes en x_3^3, $x_3^2\,x_1$, $x_3^2\,x_2$ disparaissent de l'équation précédente.

La cubique d'intersection passe par le point C $(x_1=0,\ x_2=0)$ *qui en est un point double.*

Cette proposition se vérifie aisément par un calcul direct.

2° *Lorsque deux des sommets,* B *et* C, *du triangle* ABC, *sont sur* C_4, *la cubique a deux points doubles* B *et* C ; *elle se compose évidemment de la bisécante* BC *et d'une conique.*

Dans ce cas, les déterminants entrant dans les coefficients de l'équation (37) sont nuls s'ils renferment deux colonnes de

quantités b ou c. Cette équation se réduit à $x_1 = 0$ et à

$$x_1^2 J + x_1 x_2 (H_4, f_4')^4 + x_1 x_3 (H_4, f_4')^4 + x_2 x_3 [f_4, (f_4', f_4'')^2]^4 = 0;$$

celle-ci représente la conique considérée.

Mettons-y en évidence les paramètres θ_1 et θ_2 des points B et C; elle devient

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 J + x_1 x_2 H_{4,1} + x_1 x_3 H_{4,2} + x_2 x_3 (\theta_1 - \theta_2)^2 [a_0 \theta_1^2 \theta_2^2 + 2a_1 \theta_1 \theta_2 (\theta_1 + \theta_2) \\ + a_2 (\theta_1^2 + \theta_2^2 + 4\theta_1 \theta_2) + 2a_3 (\theta_1 + \theta_2) + a_4] = 0, \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

formule dans laquelle $H_{4,1}$ et $H_{4,2}$ désignent le hessien de la forme f_4, la variable $\frac{x_1}{x_2}$ étant remplacée successivement par θ_1 ou θ_2.

Si les paramètres θ_1 et θ_2 sont racines du hessien, la conique se représente par une équation de la forme

$$x_1^2 + m x_2 x_3 = 0;$$

elle est tangente aux droites $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$; la droite $x_1 = 0$ est la polaire du point A par rapport à cette conique. On peut combiner deux à deux les racines du hessien; on a donc ainsi l'énoncé :

Par un point quelconque A *de l'espace à quatre dimensions, on peut mener six plans rencontrant* S_3 *suivant une conique propre et une droite, polaire de* A *par rapport à cette courbe. Cette droite est une arête du tétraèdre dont les sommets figurent sur* C_4 *les racines du hessien de la forme biquadratique correspondant au point* A.

3° L'hyperplan tangent à S_5 suivant la bisécante BC a pour équation

$$\begin{aligned} 6z_1 - 3z_2(\theta_1 + \theta_2) + z_3(\theta_1^2 + \theta_2^2 + 4\theta_1\theta_2) - 3z_4\theta_1\theta_2(\theta_1 + \theta_2) \\ + 6z_5\theta_1^2\theta_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Lorsque le point A est un point quelconque de cet espace, le facteur entre crochets s'annule dans l'équation (38), qui devient

$$x_1 [J x_1 + H_{4,1} x_2 + H_{4,2} x_3] = 0.$$

Tout plan passant par une bisécante de C_4 *et contenu dans l'hyperplan tangent à* S_3 *le long de cette bisécante, rencontre l'hypersurface suivant trois droites dont deux coïncident avec la bisécante* $x_1 = 0$.

La troisième, que nous appelons *d*, n'est pas une bisécante.

Par une droite d'un hyperplan passe une simple infinité de plans. La bisécante BC est donc rencontrée par une simple infinité de droites *d* appartenant à l'hypersurface S_3.

Pour trouver le lieu de ces droites *d*, il suffit de remarquer qu'elles sont contenues dans l'hyperplan; elles constituent donc ensemble l'intersection de S_3 et de cet hyperplan ; or, cette intersection est une surface du troisième ordre; nous avons donc le théorème :

Tout hyperplan tangent à S_3 *rencontre cette hypersurface suivant une surface réglée du troisième ordre ayant comme droite double la bisécante de* C_4 *qui passe par le point de contact.*

L'hypersurface S_3 *est le lieu de ces cubiques réglées.*

Les génératrices *d* que nous rencontrons ici ont déjà été signalées précédemment (n° 19). Chacune d'elles s'appuie sur deux bisécantes.

4° Le discriminant de la conique (38) est

$$K[H_{4,1} \cdot H_{4,2} - J.K],$$

K représentant le coefficient du terme en x_2x_3.

Il sera nul pour les valeurs de θ_1 et θ_2 qui vérifient l'équation obtenue en égalant à zéro le dernier facteur. Cette équation étant du quatrième degré en θ_2, on voit que, *par le point* A *et un point quelconque de la courbe normale passent quatre plans, encore sécants à celle-ci, donnant comme intersection avec l'hypersurface* S_3 *trois droites distinctes.*

En second lieu, ce discriminant est nul pour $\theta_1 = \theta_2$, le facteur $\theta_1 - \theta_2$ entrant dans K. Donc, *tout plan déterminé par une tangente à* C_4 *et un point quelconque* A *rencontre l'hypersurface* S_3 *suivant trois droites; deux de celles-ci coïncident avec la tangente* (conséquence du 3°).

— Lorsque le point A est pris sur S_3, les points B et C étant d'ailleurs supposés dans les conditions du 3° ci-dessus, l'équation (38) se réduit à

$$x_1(H_{4,1}x_2 + H_{4,2}x_3) = 0;$$

la section donne donc la bisécante $x_1 = 0$ comptée deux fois et la droite

$$H_{4,1}x_2 + H_{4,2}x_3 = 0,$$

qui passe aussi par le point A. Le plan de section est tangent à S_3 au point A et le long de la bisécante.

Ce cas n'est pas essentiellement distinct du cas examiné au 3° ci-dessus.

— 5° Si le plan ABC est trisécant à la courbe C_4, l'équation (37) devient

$$x_1x_2x_3 = 0,$$

les points A, B et C étant pris aux intersections. La cubique est donc constituée par trois droites distinctes, résultat évident *a priori*.

Quand ce plan est tangent, en demeurant bisécant à la courbe C_4, la cubique correspondante comprend la tangente au point de contact comme droite double et la bisécante du plan.

Enfin, un plan osculateur à la courbe C_4 rencontre S_3 suivant la tangente au point d'osculation, comptée trois fois. Cela résulte des deux remarques précédentes. Mais on peut s'en assurer analytiquement en procédant comme il est dit au numéro 8.

En substituant les valeurs (17) à z_2 et z_4 dans l'équation de l'hypersurface, on obtient en effet

$$(3z_1 - z_3\theta^2 + 3z_3\theta')^5 = 0.$$

22. L'étude complète des surfaces cubiques trouvées en coupant l'hypersurface S_5 par l'hyperplan défini au moyen des points A, B, C et D, nous entraînerait très loin.

L'équation la plus générale de cette surface se met sous la

forme d'un déterminant en substituant aux variables, dans l'équation de S_3, les valeurs données par les formules (18). On peut l'écrire, en abrégé, ainsi :

$$\Sigma x_1^3(a_0a_1a_2) + \Sigma x_1^2x_2[(a_0a_1b_2) + (b_0a_1a_2) + (a_0b_1a_2)]$$
$$+ \Sigma x_1x_2x_3[(a_1b_1c_2) + (a_0c_1b_2) + (b_0a_1c_2) + (c_0a_1b_2) + (b_0c_1a_2) + (c_0b_1a_2)] = 0;$$

ou bien, symboliquement, les formes f_4, f'_4, f''_4, f'''_4 se rapportant aux points A, B, C, D :

$$\Sigma x_1^3 J + \Sigma x_1^2x_2(f'_4H_4)^4 + \Sigma x_1x_2x_3[f_4, (f'_4, f''_4)^2]^4 = 0.$$

Nous connaissons (numéro 20) la signification de l'égalité à zéro de chacun de ses coefficients, et nous pourrions facilement voir comment cette équation se réduit suivant les situations particulières attribuées aux points A, B, C ou D.

Nous nous arrêterons seulement aux observations suivantes :

— Un espace linéaire à trois dimensions rencontre toujours C_4 en quatre points qui peuvent être ou non tous les quatre réels.

Appelons θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 les paramètres de ces points supposés réels. En les choisissant comme points déterminant l'hyperplan considéré, l'équation de la surface cubique d'intersection prend la forme curieuse

$$\Sigma x_1x_2x_3(\theta_1 - \theta_2)^2(\theta_2 - \theta_3)^2(\theta_3 - \theta_1)^2 = 0,$$

qui comprend quatre termes seulement.

On a le théorème : *la section de l'hypersurface* S_3 *par un hyperplan est une surface cubique passant par les arêtes du tétraèdre qui a pour sommets les intersections de* C_4 *et de l'hyperplan et possédant quatre points doubles en ces sommets.*

Ce tétraèdre est ici tétraèdre de référence.

Cet énoncé est évident ; la dernière partie résulte de ce que trois arêtes génératrices passent par chaque sommet et aussi de ce qu'un plan passant par un sommet et compris dans l'hyper-

plan, donne une courbe cubique à point double par son intersection avec S_3.

Toute surface cubique à quatre points doubles porte neuf droites ; nous venons d'en désigner six ; les trois autres sont les intersections du plan tangent à la surface le long des trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre.

Nous retrouvons encore ici les droites *d* du numéro précédent, 3°, et aussi du numéro **19**. Du reste, on a l'énoncé :

La condition pour qu'une génératrice de S_3 *s'appuie sur deux bisécantes est qu'elle appartienne à une surface cubique répondant à l'équation ci-dessus.*

Car les coordonnées d'un point d'une droite s'appuyant sur la bisécante unissant les points de paramètre θ_1 et θ_2 et sur celle relavive aux points de paramètre θ_3 et θ_4 sont de la forme :

$$z_{3-i} = \binom{4}{i}[(\theta_1^i + k\theta_2^i) + l(\theta_3^i + k'\theta_4^i)]. \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

En les substituant dans l'équation de S_3, on trouve l'équation précédente où l'on aurait fait la substitution :

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : k : l : lk'.$$

— Nous avons vu précédemment (numéro **21**, 3°) que tout hyperplan tangent à S_3 rencontre cette hypersurface suivant une surface cubique réglée qui a une bisécante de C_4 comme droite double.

Lorsque l'hyperplan est surosculateur à C_4, il contient en entier le plan osculateur à la courbe au point de surosculation. Or, ce plan coupe C_3 suivant une droite considérée comme triple. L'hyperplan rencontre donc S_3 suivant une surface cubique à droite triple ; cette surface est, par conséquent, constituée par trois plans passant par cette droite.

Le plan osculateur n'est pas un de ceux-ci, puisque son intersection avec S_3 est parfaitement déterminée.

La courbe C_4 a une infinité de tangentes par chacune desquelles passent trois plans constituant de telles surfaces cubiques d'intersection.

Donc, *l'hypersurface* S_5 *possède une triple infinité de plans générateurs passant par ses génératrices tangentes à* C_4.

— Les propriétés que nous venons de mentionner pour S_5 en la coupant par une droite, un plan, un hyperplan, pourraient facilement, pour la plupart, s'appliquer aux hypersurfaces S_{n+1}. Il suffirait en quelque sorte de remplacer f_4 par f_{2n} dans les remarques ci-dessus et le hessien H_4 par le covariant F défini au numéro 18. Les sections sont généralement des courbes, surfaces ou variétés d'ordre $n+1$.

* * *

23. Les propriétés des hypersurfaces S_2 et S_3, appliquées aux variétés *similaires* de l'espace à sept dimensions, fournissent une interprétation nouvelle des expressions analytiques obtenues dans le présent mémoire.

Pour avoir cette interprétation, il suffirait de faire usage des résultats développés dans nos travaux intitulés : *Sur une correspondance entre le plan et l'espace* (*) ; *Sur une correspondance entre les espaces à* n *et à* 2n — 1 *dimensions* (**).

Voici seulement quelques indications à ce sujet.

Appelons Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 les déterminants tirés du tableau rectangulaire

$$\left\| \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \end{matrix} \right\|,$$

en supprimant successivement chaque colonne à partir de la dernière.

La formule

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_4 : Z_5 = x_1^4 : 4x_1^3x_2 : 6x_1^2x_2^2 : 4x_1x_2^3 : x_2^4,$$

(*) Bulletin de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique, 1909, n° 9.

(**) Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 3e série, t. IX.

définit une variété (C_4) de l'espace à sept dimensions constituée par les espaces à trois dimensions tangents, en quatre points coïncidents, à la courbe normale C_7 du premier espace.

Aux hypersurfaces S_2 et S_3 correspondent les variétés similaires (S_2) et (S_3) que nous pouvons représenter analytiquement par les relations

$$12Z_1Z_5 - 3Z_2Z_4 + Z_3^2 = 0,$$
$$72Z_1Z_3Z_5 + 9Z_2Z_3Z_6 - 2Z_3^3 - 27Z_1Z_4^2 - 27Z_2^2Z_5 = 0.$$

Ces variétés ont comme éléments générateurs des espaces à trois dimensions similaires respectivement des points des hypersurfaces S_2 et S_3.

Un point A de l'espace à quatre dimensions a pour similaire un espace à trois dimensions déterminé par les « coordonnées ».

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_4 : Z_5 = a_4 : -4a_3 : 6a_2 : -4a_1 : a_0.$$

Les variables et les équations ainsi définies, combinées entre elles par les calculs développés dans le présent travail, donnent lieu à des énoncés nouveaux que l'on aurait en remplaçant, dans les précédents, les hypersurfaces S_2 et S_3 par les variétés (S_2) et (S_3) ; les points par des espaces à trois dimensions ; les droites, les plans et les hyperplans par des variétés similaires, constituées par des espaces à trois dimensions de la même manière que ces figures sont constituées par des points.

Ces indications suffisent pour permettre au lecteur de se faire une idée de l'extension dont nous voulons parler et lui montrer en outre qu'elle pourrait avoir lieu entre les hypersurfaces S_2 et S_{n+1} de l'espace de $2n$ dimensions et les figures similaires de l'espace à $4n - 1$ dimensions.

24. Une étude analogue à la précédente est possible avec tous les invariants des formes binaires ; *on peut faire correspondre à chacun l'équation d'une figure géométrique qui permet d'interpréter, à son tour, un grand nombre de fonctions invariantes de la forme ou du système de plusieurs formes.*

La développable circonscrite à une cubique gauche en est un nouvel exemple, pris en dehors des formes de degré pair.

Si les équations de cette courbe sont

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1,$$

la développable est représentée par la formule

$$(9z_1z_4 - z_2z_3)^2 - 4(3z_1z_3 - z_2^2)(3z_2z_4 - z_3^2) = 0.$$

Elle est le lieu du point A ayant pour coordonnées $(a_3, -3a_2, 3a_1, -a_0)$, dont le plan polaire

$$a_0z_1 + a_1z_2 + a_2z_3 + a_3z_4 = 0,$$

pris relativement à la courbe, est tangent à celle-ci ; elle correspond à l'invariant de la forme cubique $f_3 \equiv a_x^3$.

Au covariant cubique, du troisième degré par rapport aux coefficients de f_3, répond le plan polaire d'un point A quelconque de l'espace, pris relativement à la développable. Et, si l'on joint par une droite ce point A au pôle du plan précédent, pris par rapport à la courbe, cette droite est une bisécante de la cubique gauche ; elle marque, par ses appuis, les images des racines du hessien de f_3 ; ses équations répondent à ce hessien.

SUR

LES INVOLUTIONS D'ORDRE np

ET

DE RANG $(np - 1)$

PAR

J. FAIRON

RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

L'involution I_1^2 peut être envisagée comme étant un cas particulier de l'involution d'ordre $2p$ et de premier rang, I_1^{2p}, ou de rang $(2p-1)$, I_{2p-1}^{2p}.

La représentation rappelée ci-dessus a été généralisée en ce qui concerne l'involution I_1^{2p}, de la manière suivante :

Deux courbes d'ordre p données déterminent un faisceau ponctuel et rencontrent une conique fondamentale en deux groupes de $2p$ points qui définissent l'involution I_1^{2p}. Chacun des éléments du faisceau, par ses intersections avec la conique, marque un nouveau groupe de $2p$ points. La courbe qui passe par les points de base et un point M donné du support rencontre encore celui-ci en $(2p-1)$ points qui complètent le groupe dont M fait partie.

On pourrait facilement obtenir sur la cubique gauche, au moyen d'un faisceau de surfaces réglées inscrites à la courbe, les constructions similaires sur lesquelles nous n'insistons pas.

Nous regarderons ici I_1^2 comme étant un cas particulier de I_{2p-1}^{2p}.

Nous verrons que l'on peut obtenir une infinité de groupes de l'involution I_{2p-1}^{2p} sur la conique ou sur la cubique gauche par la considération de courbes d'ordre p d'un faisceau du plan, ou de surfaces réglées d'ordre $2p$ inscrites à la cubique.

Nous démontrerons quelques théorèmes auxquels notre représentation donne lieu et nous établirons la possibilité de l'extension de ces théories à l'hyperespace et aux involutions I_{np-1}^{np}.

*
* *

1. Dans le Mémoire rappelé ci-dessus, nous avons étudié la correspondance définie par les formules

$$z_1 : z_2 : z_3 = a_2 : -2a_1 : a_0,$$
$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = a_2 : -2a_1 : a_0.$$

Les premières représentent, dans le plan, le pôle, pris par

rapport à une conique fondamentale C_2, de la droite ayant pour équation

$$a_0z_1 + a_1z_2 + a_2z_3 = 0.$$

Cette conique répond aux équations paramétriques

$$z_1 : z_2 : z_3 = \lambda^2 : 2\lambda : 1,$$

ou à l'équation ordinaire

$$z_2^2 - 4z_1z_3 = 0.$$

Les secondes, dans lesquelles on a posé

$$Z_1 \equiv z_1z_3 - z_2^2,$$
$$Z_2 \equiv z_1z_4 - z_2z_3,$$
$$Z_3 \equiv z_2z_4 - z_3^2,$$

définissent une bisécante de la cubique gauche Γ_3 qui a pour équations paramétriques

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \lambda_3 : \lambda_2 : \lambda : 1,$$

Nous avons fait remarquer que cette bisécante est la « droite pôle » par rapport à la développable (C_2) circonscrite à la cubique gauche, de l'hyperboloïde inscrit à cette dernière courbe, hyperboloïde dont l'équation est

$$a_0Z_1 + a_1Z_2 + a_2Z_3 = 0.$$

La développable circonscrite a pour équations paramétriques

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = \lambda^2 : 2\lambda : 1,$$

et pour équation ordinaire

$$Z_2^2 - 4Z_1Z_3 = 0.$$

— Nous avons appelé *similaires* les éléments géométriques, les figures, les propositions... qui correspondent aux mêmes

formules dans le plan ou dans l'espace, et nous nous sommes servi des notations $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ pour désigner les coordonnées z ou Z, suivant que nous faisions de la géométrie plane ou de la géométrie dans l'espace.

Dans ces conditions, les formules

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 = a_2 : -2a_1 : a_0,$$
$$a_0\zeta_1 + a_1\zeta_2 + a_2\zeta_3 = 0,$$
$$\zeta_2^2 - 4\zeta_1\zeta_3 = 0,$$

représentent respectivement le point A du plan ou la bisécante (A), de Γ_3, similaire; la droite a du plan ou l'hyperboloïde similaire (a), inscrit à Γ_3; la conique fondamentale C_2 et la développable (C_2) circonscrite à la cubique gauche.

— Nous prendrons dans le plan pour support des points représentatifs des involutions, la conique C_2; l'image de ces points sur la cubique gauche Γ_3 résultera de la correspondance que nous venons de rappeler.

Car, à tout point de C_2 se rapporte une génératrice de la développable (C_2); ces éléments, points et droites, se déterminent par des conditions similaires. Or, à chaque génératrice peut se substituer son point de contact sur Γ_3. De sorte que nous obtenons sur C_2 et Γ_3, par un raisonnement unique, des points qui seront les images des mêmes groupes d'une involution.

En ce qui concerne l'espace, nous devrons toujours passer par l'intermédiaire de la réglée (C_2), qui seule correspond à la conique fondamentale du plan.

2. Sur l'involution I_1^2. — Nous nous permettrons de rappeler brièvement quelques propriétés élémentaires de l'involution quadratique I_1^2. Nous nous proposons d'en montrer l'origine et la généralisation dans certaines hypothèses. Elles nous serviront de repères dans la suite.

Soit

$$a_0x_1y_1 + a_1(x_1y_2 + x_2y_1) + a_2x_2y_2 = 0,$$

l'équation caractéristique de cette involution. Ses éléments doubles ont pour paramètres les racines de la forme binaire

$$f_2 \equiv a_x^2 \equiv a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2.$$

Les formules

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 = a_2 : -2a_1 : a_0 \qquad (1)$$

définissent le point central A de l'involution.

Toute droite passant par ce point marque, par ses intersections avec la conique C_2, *un couple de l'involution.*

Chacune de ces droites peut être regardée comme étant la jonction du point central et d'un point B situé dans le plan.

définissent la bisécante (A) similaire du point central.

Tout hyperboloïde, inscrit à Γ_3 *et passant par cette droite, rencontre la développable* (C_2) *suivant deux tangentes à* Γ_3 *dont les contacts marquent un couple de points de l'involution.*

Chaque hyperboloïde peut être envisagé comme ayant pour génératrices fondamentale la bisécante (A) et une autre bisécante (B) quelconque.

Si $(b_2, -2b, b_0)$ sont les coordonnées de B ou de (B), l'élément considéré du faisceau a pour équation

$$\begin{vmatrix} 2\zeta_1 & -\zeta_2 & 2\zeta_3 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation

$$a_0\zeta_1 + a_1\zeta_2 + a_2\zeta_3 = 0, \qquad (2)$$

fait connaître l'axe a *de cette involution. Celui-ci rencontre la conique support en deux*

représente un hyperboloïde (a), *inscrit à* Γ_3, *qui rencontre* (C_2) *suivant deux tangentes à* Γ_3;

points qui sont les images des points doubles.

Ces points doubles sont aussi les contacts des tangentes menées à la conique C_2 *par le point central* A.

Tout couple de tangentes menées à C_2 *par un point de cette droite marque, par ses contacts, un couple de l'involution* I_1^2.

les contacts représentent les éléments doubles de l'involution.

Ces éléments doubles sont aussi marqués sur Γ_3 *par les génératrices de contact de la développable* (C_2) *et des deux cônes tangents qu'on peut lui mener par la bisécante* (A).

Les couples de cônes inscrits à Γ_3, *se coupant suivant une génératrice de* (a) *marquent, par leurs sommets, un couple de l'involution* I_1^2.

Nous devons remarquer que la formule (2) se déduit de l'équation

$$f_2 \equiv a_x^2 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0,$$

par la substitution

$$x_1^2 : 2x_1 x_2 : x_2^2 = \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3. \qquad (3)$$

3. Lemmes sur la géométrie des formes binaires. — Les constructions que nous voulons étudier dépendent des remarques suivantes :

Première remarque. — Soit une forme binaire d'ordre $2p$, égalée à zéro,

$$f_{2p} \equiv a_0 x_1^{2p} + \binom{2p}{1} a_1 x_1^{2p-1} x_2 + \cdots + a_{2p} x_2^{2p} = 0. \qquad (4)$$

Ses racines sont les points multiples d'ordre $2p$ de l'involution I_{2p-1}^{2p} d'ordre $2p$ et de rang $(2p-1)$ dont l'équation symbolique est

$$a_{x1} a_{x2} \ldots a_{x2p} = 0.$$

Par la substitution (3), l'équation (4) peut se ramener à celle d'une courbe K_p, d'ordre p, — ou d'une surface réglée similaire (K_p), d'ordre $2p$.

Pour cela, exprimons d'abord f_{2p} en fonction de ses dérivées d'ordre $2p-2$; regardons ensuite celles-ci comme constantes et écrivons la nouvelle forme, d'ordre $2P = 2p-2$, en fonction de ses dérivés d'ordre $2P-2$; et ainsi de suite. Définitivement, nous obtenons une expression de f_{2p} ne renfermant plus que des groupements de variables de la forme

$$x_1^2, \quad 2x_1x_2, \quad x_2^2,$$
$$\alpha_0 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2$$

dans lesquels la substitution (3) est aisée.

Par exemple, l'équation $f_6 = 0$ fournit celle d'une cubique K_3 ou de la réglée (K_3) :

$$a_0\zeta_1^3 + a_3\zeta_2^3 + a_6\zeta_3^3 + 6a_5\zeta_1\zeta_2\zeta_3 + 3a_1\zeta_1^2\zeta_2 + 3a_2\zeta_1^2\zeta_3 + 3a_3\zeta_1\zeta_2^2 + 3a_4\zeta_1\zeta_3^2 + 3a_4\zeta_2^2\zeta_3 + 3a_5\zeta_2\zeta_3^2 = 0.$$

Ainsi que cela résulte de la substitution,

la courbe K_p *rencontre* C_2 *en* $2p$ *points dont les paramètres sont les racines de l'équation* $f_{2p} = 0$; *ce sont les images des éléments multiples d'ordre* $2p$ *d'une involution* I_{2p-1}^{2p}.

la surface (K_p) *rencontre la développable* (C_2) *suivant* $2p$ *tangentes à* Γ_3; *leurs points de contact sont les images des racines de* $f_{2p} = 0$ *et celles des points multiples d'ordre* $2p$ *de l'involution* I_{2p-1}^{2p}.

La courbe K_p et la réglée (K_p), dans le cas de l'involution quadratique, sont l'axe a et l'hyperboloïde (a).

Dans ce qui suit, nous supposerons connues la courbe K_p et la surface (K_p) dès que l'involution est définie par son équation symbolique.

— Il résulte de la substitution (3) que dériver l'équation ternaire $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = 0$ par rapport à ξ_1, ζ_3 ou ζ_2 donne le même

résultat que dériver deux fois l'équation correspondante $f_{2p} = 0$ respectivement par rapport à x_1 ou x_2 ou successivement une fois par rapport à x_1 et à x_2, puis faire dans le résultat la substitution considérée.

Nous pourrons donc exprimer indifféremment nos formules au moyen de ζ_1, ζ_2, ζ_3 ou de x_1, x_2.

Pour la brièveté, nous marquerons par les signes (1) et (2) les dérivées premières de f_{2n} prises par rapport à x_1 ou x_2; les dérivées secondes seront (1, 1), (1, 2), (2, 2), notation qui s'explique d'elle-même, etc.

Deuxième remarque. — *Le lieu des points du plan dont les droites polaires, prises par rapport à la conique-support et à deux courbes* K_p, $K_{p'}$ *correspondant respectivement aux formes* f_{2p}, $f_{2p'}$, *sont concourantes, est une courbe dont l'équation, par la substitution* (3) *faite en sens inverse, se réduit au jacobien des formes binaires* f_{2p}, $f_{2p'}$.

Le lieu des bisécantes de Γ_3 *dont les hyperboloïdes polaires pris par rapport à la développable circonscrite et aux deux réglées* (K_p), $(K_{p'})$ *correspondant respectivement aux formes* f_{2p}, $f_{2p'}$ *se coupent suivant une même bisécante de* Γ_3 *est une réglée dont l'équation se ramène au jacobien des formes* f_{2p}, $f_{2p'}$ *par la substitution* (3), *faite en sens inverse.*

Il nous suffit de démontrer le théorème de géométrie plane.

Soient ζ'_1, ζ'_2, ζ'_3 les coordonnées d'un point du lieu. Les équations des droites polaires de ce point par rapport aux courbes C_2, K_p, $K_{p'}$ sont respectivement

$$2\zeta_1\zeta'_3 - \zeta_2\zeta'_2 + 2\zeta_3\zeta'_1 = 0,$$
$$\zeta_1(1, 1) + \zeta_2(1, 2) + \zeta_3(2, 2) = 0,$$
$$\zeta_1(1, 1)' + \zeta_2(1, 2)' + \zeta_3(2, 2)' = 0,$$

les dérivées affectées d'accents se rapportant à $f_{2p'}$ et la substitution

$$x_1^2 : 2x_1x_2 : x_2^2 = \zeta'_1 : \zeta'_2 : \zeta'_3$$

étant faite dans toutes les dérivées.

Le lieu cherché a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} 2\zeta_3' & -\zeta_2' & 2\zeta_1' \\ (1,1) & (1,2) & (2,2) \\ (1,1)' & (1,2)' & (2,2)' \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Cette expression, par la substitution précédente, faite dans l'ordre inverse, donne la formule

$$\begin{vmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \\ (1,1) & (1,2) & (2,2) \\ (1,1)' & (1,2)' & (2,2)' \end{vmatrix} = 0,$$

qui est une forme de l'équation jacobienne $(f_{2p}, f_{2p'})^1 = 0$.

La propriété précédente du jacobien de deux formes binaires est donc analogue à celle qui existe pour le jacobien de trois formes ternaires.

Lorsque les courbes C_2, K_p, $K_{p'}$, ont un point commun — c'est-à-dire si les formes f_{2p}, $f_{2p'}$ ont une racine commune, — ce point est situé sur la courbe jacobienne que nous venons d'obtenir; autrement dit, le jacobien a aussi cette racine.

4. Application a un jacobien particulier. — Au lieu de formes d'ordre pair quelconques, considérons en particulier une forme f_{2p} et une forme quadratique

$$f_2 \equiv b_x^2 \equiv b_0x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + b_2x_2^2.$$

L'équation (5) s'écrira

$$\begin{vmatrix} 2\zeta_3' & -\zeta_2' & 2\zeta_1' \\ (1,1) & (1,2) & (2,2) \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

et, dans ce cas,

la courbe jacobienne est le lieu des points dont les droites polaires, prises par rapport

la réglée jacobienne est le lieu des bisécantes de Γ_3 dont les hyperboloïdes polaires, pris par

à C_2 *et* K_p, *concourent en un même point de la polaire* b, *prise par rapport à* C_2, *du point* B *ayant pour coordonnées*

rapport aux surfaces (C_2) *et* (K_p), *se rencontrent suivant une génératrice de l'hyperboloïde polaire* (b) *de la bisécante* (B) *définie par les formules*

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 = b_2 : -2b_1 : b_0.$$

Cette courbe ou cette réglée — que nous appellerons respectivement J_p et (J_p) — correspond alors au jacobien

$$(f_2, \quad f_{2p})^1 = 0.$$

Si l'on parvient à les construire, on obtient sur C_2 ou sur Γ_3 les images des racines de l'équation

$$(f_2, \quad f_{2p})^1 \equiv \begin{vmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \\ (1,1) & (1,2) & (2,2) \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

— Pour construire J_p, on pourra procéder comme suit, la courbe K_p étant, par hypothèse, connue.

Soit Q un point de la polaire b du point B, par rapport à la conique fondamentale. Prenons sa polaire q par rapport à la même courbe; elle passe par B et le pôle de toute droite passant par Q est sur q.

La polaire K_{p-1} d'ordre $(p-1)$ de Q par rapport à K_p est le lieu des pôles des droites polaires prises relativement à K_p, qui concourent en Q. Supposons-la construite. Les $(p-1)$ points communs à q et à K_{p-1} ont des polaires passant par Q : ce sont donc des points de la courbe J_p.

Cette courbe J_p est d'ordre p; elle rencontre donc encore q en un point; c'est le pôle B considéré, de coordonnées $b_2, -2b_1, b_0$. On voit du reste que l'équation (6) se vérifie quand on substitue ces valeurs aux variables.

Le lecteur peut faire avec facilité le raisonnement similaire.

— On vérifie analytiquement comme suit la construction ci-dessus.

Les coordonnées du point Q peuvent s'écrire

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 = (\alpha^2 + m\beta^2) : 2(\alpha + m\beta) : (1 + m),$$

α et β étant les paramètres des intersections de b avec C_2. La polaire q de ce point par rapport à la conique fondamentale et la polaire K_{p-1} par rapport à la courbe K_p, ont respectivement pour équations

$$(1 + m)\zeta_1 - (\alpha + m\beta)\zeta_2 + (\alpha^2 + m\beta^2)\zeta_3 = 0,$$
$$(\alpha^2 + m\beta^2)(1, 1) + 2(\alpha + m\beta)(1, 2) + (1 + m)(2, 2) = 0,$$

les dérivées $(1,1), (1,2), (2,2)$ étant ici des fonctions de $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. En éliminant m entre ces relations, on obtient

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 - \alpha\zeta_2 + \alpha^2\zeta_3 & \zeta_1 - \beta\zeta_2 + \beta^2\zeta_3 \\ \alpha^2(1, 1) + 2\alpha(1, 2) + (2, 2) & \beta^2(1, 1) + 2\beta(1, 2) + (2, 2) \end{vmatrix} = 0,$$

formule qui représente le lieu de l'intersection de ces polaires.

Comme on a

$$\alpha + \beta = -\frac{2b_1}{b_0}, \qquad \alpha\beta = \frac{b_2}{b_0},$$

on convertit facilement le résultat précédent et l'on obtient l'équation (6).

5. Groupes de l'involution I^{2p}_{2p-1} — *Les racines de l'équation* (7) *forment un groupe de* 2p *éléments de l'involution* I^{2p}_{2p-1} *caractérisée* (*) *par l'équation* $f_{2p} = 0$; en d'autres termes, *les racines de l'équation* (7) *forment un système apolaire des racines de* $f_{2p} = 0$.

(*) C'est-à-dire ayant pour points multiples d'ordre $2p$ les points dont les paramètres sont les racines de $f_{2p} = 0$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'invariant quadratique simultané des formes f_{2p} et $(f_2, f_{2p})^1$ soit nul.

On doit donc avoir

$$[f_{2p}, \quad (f_2, f_{2p})^1]^{2p} = 0.$$

Afin d'obtenir le premier membre de cette relation, on peut remplacer dans la forme jacobienne, les variables

$$x_1^{2p}, \quad x_1^{2p-1}x_2, \ \ldots \ x_1x_2^{2p-1}, \quad x_2^{2p}, \tag{8}$$

respectivement par les quantités

$$a_{2p}, \ -a_{2p-1}, \ \ldots \ -a_1, \ a_0, \tag{9}$$

coefficients littéraux de f_{2p}. Or, cette forme jacobienne

$$(f_2, f_{2p})^1 \equiv \begin{vmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ (1,1) & (1,2) & (2,2) \end{vmatrix}$$

s'écrit

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_{2p}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{2p}}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

ou bien

$$b_0x_1\frac{\partial f_{2p}}{\partial x_2} - b_1\left[x_2\frac{\partial f_{2p}}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial f_{2p}}{\partial x_1}\right] + b_2x_2\frac{\partial f_{2p}}{\partial x_1}.$$

Les coefficients de b_0, b_1, b_2 sont ici de degré $2p$ et dépendent des groupements (8); y faire la substitution marquée par les expressions (8) et (9) revient, en quelque sorte, à chercher l'invariant quadratique d'une forme de degré impair. Comme celui-ci est toujours identiquement nul, le théorème est démontré.

— Il résulte de là et du numéro 4 que *nous pouvons obtenir sur la conique ou la cubique gauche fondamentales une infinité de groupes de* 2p *éléments de l'involution* I^{2p}_{2p-1} *ayant pour points multiples d'ordre* 2p *les points marqués sur ces courbes par la courbe* K_p *ou la surface réglée* (K_p) *correspondant à la forme* f_{2p}.

La propriété précédente du jacobien des formes $f_2 \equiv b_x^2$ et f_{2p} est la généralisation de la propriété suivante d'une involution quadratique : on obtient sur C_2 une infinité de couples de cette involution en joignant, par des droites, tout point B du plan au point central A ; — sur (C_2), on obtient une infinité de génératrices formant une involution I_1^2 en menant les hyperboloïdes de jonction de la bisécante (A) et de toute autre bisécante (B) de la cubique gauche.

6. Une généralisation de la notion du point central. — La courbe J_p dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} 2\zeta_3 & -\zeta_2 & 2\zeta_1 \\ (1,1) & (1,2) & (2,2) \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (10)$$

et qui marque sur C_2 un groupe de l'involution I^{2p}_{2p-1} appartient à un réseau ponctuel.

Toutes les courbes J_p *relatives à une même involution passent par un certain nombre de points communs, au nombre de* $(p^2 - p + 1)$, *qui constituent les bases du réseau.*

En effet, la relation précédente est vérifiée, quels que soient les paramètres b_0, b_1, b_2, quand on a

$$\frac{\zeta_1}{(2,2)} = -\frac{\zeta_2}{2(1,2)} = \frac{\zeta_3}{(1,1)},$$

c'est-à-dire, simultanément,

$$2\zeta_1(1,2) + \zeta_2(2,2) = 0, \qquad (a)$$

$$2\zeta_3(1,2) + \zeta_2(1,1) = 0, \qquad (b)$$

$$\zeta_3(2,2) - \zeta_2(1,2) = 0. \qquad (c)$$

Ces dernières équations représentent respectivement des courbes (a), (b), (c), d'ordre p.

Les points de base du réseau vérifient le système formé par ces équations.

Or, les courbes (a) et (b) ont p^2 points communs; parmi ces points, un certain nombre sont sur la courbe (c), car la dernière relation n'est pas indépendante des deux premières.

Si nous multiplions respectivement les équations (a) et (b) par ζ_3 et ζ_1, nous aurons

$$2\zeta_1\zeta_3(1, 2) + \zeta_2\zeta_3(2, 2) = 0, \qquad (a')$$

$$2\zeta_1\zeta_3(1, 2) + \zeta_1\zeta_2(1, 1) = 0, \qquad (b')$$

d'où, par soustraction,

$$\zeta_2[\zeta_3(2, 2) - \zeta_1(1, 1)] = 0. \qquad (c')$$

La courbe (c'), constituée par la droite $\zeta_2 = 0$ et la courbe (c), passe donc par l'intersection complète des courbes (a') et (b').

Mais la courbe (a) renferme le point d'intersection des droites $\zeta_1 = 0$, point qui n'est pas sur la courbe (b) ; celle-ci, à son tour, porte le point commun aux droites $\zeta_2 = 0$, $\zeta_3 = 0$, qui n'appartient pas à la courbe (a). La droite $\zeta_2 = 0$, qui fait partie du lieu (c'), doit donc rencontrer les courbes (a) et (b) chacune en $(p-1)$ points qui font partie de l'intersection complète cherchée.

Il en résulte que les points communs aux courbes (a), (b), (c) sont au nombre de $p^2 - (p-1)$ (*).

— Ainsi, *on peut marquer sur* C_2 *une infinité de groupes de* $2p$ *points d'une involution* I^{2p}_{2p-1}, *au moyen des courbes jacobiennes* J_p *d'un réseau ayant* $p^2 - p + 1$ *points de base.*

Dans la géométrie de la cubique gauche, on a la propriété

(*) Les solutions communes aux équations (a), (b), (c) pourraient s'obtenir par une voie purement algébrique. (Voir *Leçons d'algèbre supérieure*, par G. Salmon, 16e leçon.)

similaire : *les surfaces réglées* (J_p), *d'ordre* $2p$, *inscrites à* Γ_3 *et appartenant à un réseau dont les bases sont* $p^2 - p + 1$ *bisécantes de la cubique, rencontrent la développable* (C_2) *suivant* $2p$ *tangentes à la courbe. Les points de contact de celles-ci donnent les images de groupes de* $2p$ *éléments d'une involution* I^{2p}_{2p-1}.

Les courbes (a), (b), (c) marquent chacune, sur C_2, un groupe de l'involution.

Ces courbes de même ordre, ayant en commun $(p^2 - p + 1)$ points, leur jacobienne a ces points comme points doubles.

— En particulier, pour l'involution I^2_1, les équations (a), (b), (c) sont

$$\begin{aligned} 2a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 &= 0, \\ a_0\zeta_2 + 2a_1\zeta_3 &= 0, \\ a_2\zeta_3 - a_0\zeta_1 &= 0, \end{aligned}$$

dont la troisième est une conséquence des deux autres. Le point de base — ou la bisécante de base — est défini par les deux premières, qui donnent

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 = a_2 : -2a_1 : a_0;$$

c'est le *point central* (n° 3).

Dans le cas des involutions I^4_3, les courbes (a), (b), (c) sont des coniques; le nombre des points de base est trois.

7. Rapport entre les points de base et certains éléments singuliers de l'involution. — I. Remarquons d'abord que si, dans les équations des courbes (a) et (b), nous faisons, inversement, la substitution (3), nous obtenons, à un facteur numérique près, les dérivées du premier ordre de f_{2p}.

Les groupes neutres de l'involution I^{2p}_{2p-1}, correspondant à l'équation symbolique

$$a_{x1}a_{x2}\ldots a_{x2p} = 0,$$

sont les groupes de $(2p-1)$ éléments d'une involution d'ordre $(2p-1)$ et de rang $(2p-3)$ représentée par le système

$$a_1 a_{x_2} a_{x_3} \dots a_{x_{2p}} = 0,$$
$$a_2 a_{x_2} a_{x_3} \dots a_{x_{2p}} = 0.$$

A chacune de ces équations se rapporte une involution I^{2p-1}_{2p-2} ayant respectivement pour éléments multiples d'ordre $(2p-1)$ les images des racines des formes

$$\frac{\partial f_{2p}}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f_{2p}}{\partial x_2} = 0.$$

Donc, *les courbes* (a) *et* (b) *marquent, sur la courbe fondamentale, les points multiples d'ordre* $(2p-1)$ *des deux involutions d'ordre* $(2p-1)$ *et de rang* $(2p-2)$ *relatives aux éléments neutres de l'involution* I^{2p}_{2p-1}.

II. Dans le cas de l'involution quadratique, en menant à C_2 les tangentes aux points doubles on obtient, par leur intersection, le point central, base du faisceau de droites. Comment, dans la théorie générale, les (p^2-p+1) points de base du réseau sont-ils reliés aux points multiples d'ordre $2p$ de l'involution I^{2p}_{2p-1} et à la courbe K_p?

Pour répondre à cette question, considérons les droites polaires du même point, de coordonnées ζ_1, ζ_2, ζ_3, par rapport à la conique fondamentale C_2 et à la courbe K_p.

En appelant ζ'_1, ζ'_2, ζ'_3 les coordonnées courantes, on a

$$\left.\begin{aligned} 2\zeta_1\zeta'_3 - \zeta_2\zeta'_2 + 2\zeta_3\zeta'_1 = 0, \\ \zeta'_1(1,1) + \zeta'_2(1,2) + \zeta'_3(2,2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

D'un autre côté, les points de base sont définis par les formules

$$\frac{\zeta_1}{(2,2)} = -\frac{\zeta_2}{2(1,2)} = \frac{\zeta_3}{(1,1)},$$

et ce système, rapproché des équations (11), exprime que celles-ci sont identiques entre elles.

Donc, *les points de base du réseau sont tels que leurs droites polaires par rapport aux courbes* C_2 *et* K_p *se confondent.*

En particulier, dans le cas de l'involution I_1^2, la polaire du point central, prise relativement à C_2, coïncide avec la courbe K_1, qui est ici l'axe de l'involution.

Dans celui de l'involution I_3^4, les points de base constituent les sommets du triangle autopolaire commun à C_2 et à la conique K_2 dérivant de l'équation biquadratique $f_4 = 0$.

III. Considérons aussi *le lieu des points dont les droites polaires prises par rapport à la conique fondamentale et à la courbe* K_p *se coupent sur la première de ces deux courbes.*

Les équations (11) représentent ces polaires si ζ_1, ζ_2, ζ_3 sont les coordonnées du pôle. On en tire pour les coordonnées ζ_1', ζ_2', ζ_3' du point d'intersection des polaires

$$\frac{\zeta_1'}{2\zeta_1(1,2)+\zeta_2(2,2)} = \frac{\zeta_2'}{2[\zeta_3(2,2)-\zeta_1(1,1)]} = -\frac{\zeta_3'}{2\zeta_3(1,2)+\zeta_1(1,1)},$$

expressions dont les dénominateurs sont les équations des courbes (a), (b), (c).

L'équation du lieu s'obtiendra en remplaçant dans l'équation

$$\zeta_2' - 4\zeta_1'\zeta_3' = 0$$

de C_2, les variables ζ' par les valeurs. On a

$$[\zeta_1(1,1)-\zeta_3(2,2)]^2+[2\zeta_1(1,2)+\zeta_2(2,2)][2\zeta_3(1,2)+\zeta_2(1,1)]=0. \quad (12)$$

La courbe que nous trouvons ainsi est d'ordre $2p$; nommons-la la courbe C.

Il est visible qu'elle passe par les (p^2-p+1) points de base et même que ces point en sont des points doubles.

La courbe C *représente aussi l'enveloppe des courbes* J_p *correspondant à l'équation*

$$\begin{vmatrix} 2\zeta_3 & -\zeta_2 & 2\zeta_1 \\ (1,1) & (1,2) & (2,2) \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0,$$

et telles que le point B *qui les fixe soit un point de la conique fondamentale.*

Car ces courbes J_p appartiennent à un faisceau du second ordre et la règle des enveloppes donne l'équation (12) (*).

Cette courbe C est même l'enveloppe de toutes les courbes J_p; car, au point B qui fixe l'une d'elles, on peut substituer une de ses intersections avec C_2.

— L'équation (12) de la courbe C peut s'écrire ainsi

$$[\zeta_1(1,1)+\zeta_2(1,2)+\zeta_3(2,2)]^2+(\zeta_2^2-4\zeta_1\zeta_3)[(1,1)(2,2)-(1,2)^2]=0. \quad (13)$$

Le premier terme de cette expression représente l'équation de la courbe K_p que nous supposons connue; le dernier facteur du second terme est l'équation d'une courbe H_p dont l'équation se rapporte au hessien de la forme f_{2p}.

Cette expression montre que la courbe C passe par les intersections des courbes K_p et C_2; de plus, la substitution (3), faite en sens inverse dans cette formule, la ramène à $(f_{2p})^2 = 0$, le facteur $\zeta_2^2 - 4\zeta_1\zeta_2$ s'annulant identiquement.

Ainsi, *la courbe* C *est tangente à* C_2 *aux points où cette courbe est rencontrée par* K_p, *c'est-à-dire aux points multiples d'ordre* 2p *de l'involution.*

Pour l'involution I_1^2, la courbe C est constituée par les deux tangentes aux points doubles menées par le point central; son équation

$$(a_0\zeta_1 + a_1\zeta_2 + a_2\zeta_3)^2 + (\zeta_2^2 - 4\zeta_1\zeta_3)(a_0a_2 - a_1^2) = 0$$

est décomposable et identique à

$$(\zeta_1 - \zeta_2\lambda + \zeta_3\lambda^2)(\zeta_1 - \zeta_2\mu + \zeta_3\mu^2) = 0,$$

λ et μ étant les paramètres des points doubles.

Dans le cas de l'involution I_3^4, la courbe C est du quatrième

---

(*) Dans une note insérée à la fin de ce travail, nous montrons que les courbes J_p permettent de ramener le problème qui consiste à *compléter un groupe de* 2p *points d'une involution* I_{2p-1}^{2p}, *groupe dont on connaît* (2p — 1) *points*, au problème : trouver des groupes de $(2p-1)$ points communs à $(2p-2)$ involutions I_{2p-2}^{2p-1}.

ordre; elle possède trois points doubles, les points de base; elle est donc unicursale.

— La courbe C, d'après l'équation (15), passe aussi par les points communs à K_p et à la courbe H_p. Le hessien de f_{2p} étant d'ordre $4(p-1)$, la courbe H_p est d'ordre $2(p-1)$ et le nombre de ces points est ainsi de $2p(p-1)$.

Ces $2p(p-1)$ *points sont, sur* K_p, *les points de contact des tangentes communes à* C_2 *et à* K_p.

Car si nous considérons un point où aboutit, sur K_p, une de ces tangentes, la droite polaire de ce point par rapport à K_p est cette tangente elle-même. Sa droite polaire par rapport à C_2 passe par le point de contact de la tangente commune; le point considéré est donc un point de la courbe C.

Le nombre des tangentes communes est égal au nombre des points communs aux courbes réciproques de C_2 et K_p; ces réciproques étant d'ordres deux et $p(p-1)$, le nombre des tangentes communes est bien $2p(p-1)$, comme il est dit ci-dessus.

— La propriété de la courbe C de passer par les contacts des tangentes communes à K_p et C_2 est une conséquence du théorème suivant : *La courbe* H_p *est le lieu des points dont les polaires par rapport à* K_p *sont tangentes à la conique* C_2.

En effet, la polaire du point $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ par rapport à K_p a pour équation

$$\zeta_1'(1,1) + \zeta_2'(1,2) + \zeta_3'(2,2) = 0,$$

$\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3'$ étant des coordonnées courantes.

Cette droite rencontre C_2 aux points dont les paramètres sont les racines de l'équation

$$x_1^2(1,1) + 2x_1x_2(1,2) + x_2^2(2,2) = 0,$$

et elle sera tangente à C_2 si les racines considérées sont égales, c'est-à-dire si l'on a

$$(1,1)(2,2) - (1,2)^2 = 0,$$

formule qui représente la courbe H_p.

Ce théorème permet de construire cette dernière et, par suite, d'obtenir sur K_p les $2p(p-1)$ points envisagés.

IV. Le théorème similaire découlant des propriétés précédentes est: *le lieu des bisécantes de la cubique gauche* Γ_3, *telles que leurs hyperboloïdes polaires, pris par rapport à la développable circonscrite et à la réglée* (K_p), *se coupent suivant des tangentes à la cubique gauche est une surface réglée* (C), *d'ordre* $4p$. *Cette surface a, comme génératrices rectilignes doubles,* $(p^2 - p + 1)$ *bisécantes de la cubique; elle est tangente à la développable circonscrite suivant les droites de rencontre de celle-ci et de* (K_p); *elle coupe encore cette dernière surface suivant* $2p(p-1)$ *droites qui sont, sur la surface* (K_p), *les génératrices de contact des hyperboloïdes tangents communs à la développable circonscrite et à la réglée* (K_p).

La surface (C) est liée à la représentation des involutions I^{2p}_{2p-1} sur la développable (C_2) et sur la cubique Γ_3 par des remarques similaires de celles que nous avons énoncées.

8. Sur le point B. — On peut indifféremment, dans les raisonnements qui précèdent, considérer les quantités b_0, b_1, b_2 soit comme étant des paramètres quelconques, soit comme représentant les coordonnées

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 = b_2 : -2b_1 : b_0 \qquad (14)$$

d'un point B du plan (ou d'une bisécante de Γ_3).

Dans ce dernier cas, chaque courbe J_p passe par le point B correspondant, car l'équation (10) est vérifiée par les valeurs (14).

I. Nous allons montrer que *la connaissance du point* B *entraîne celle de la tangente en ce point à la courbe correspondante* J_p; ou bien, dans la figure similaire, que la réglée (J_p) est tangente suivant la génératrice (B), définie par les relations (14), à un hyperboloïde parfaitement connu.

On ramène facilement l'équation de la droite polaire du point B, par rapport à J_p, à la forme

$$\begin{vmatrix} 2\zeta_1 & -\zeta_2 & 2\zeta_3 \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ (2,2)' & (1,2)' & (1,1)' \end{vmatrix} = 0,$$

les accents indiquant que l'on a fait la substitution marquée par les formules (14).

Or, le point B étant sur la courbe J_p, cette polaire est tangente à J_p en ce point.

Un second point en est connu; il a pour coordonnées

$$\frac{2\zeta_1}{(2,2)'} = -\frac{\zeta_2}{(1,2)'} = \frac{2\zeta_3}{(1,1)'},$$

expressions qui vérifient le déterminant ci-dessus. Ce point est visiblement le pôle, pris par rapport à C_2, de la droite polaire du point B relative à K_p.

On pourrait donc construire la tangente à J_p au point B en procédant ainsi : on prendrait la polaire de B par rapport à la courbe K_p donnée, puis le pôle de cette droite relativement à la conique fondamentale; la droite de jonction de ces points est la tangente cherchée.

Ainsi, la connaissance du point B correspond à deux conditions dans la détermination de la courbe J_p.

Dans le cas de l'involution I_3^4, comme il y a trois points de base, le point B détermine entièrement la conique J_p; de plus, ici la construction de la polaire de B, par rapport à la courbe K_p, est toujours possible.

II. Si, dans l'équation (10) du faisceau de courbes J_p, nous faisions varier b_0, b_1, b_2, il semblerait, puisque le plan renferme une double infinité de points — et la cubique gauche une double infinité de bisécantes — que nous dussions trouver une double infinité de courbes J_p et un nombre correspondant de groupes de $2n$ points de l'involution I_{2p-1}^{2p}.

Cependant cette conclusion est fausse. Car si nous supposons construite la courbe J_p correspondant à un point B donné, tout point de cette courbe peut jouer le rôle de B, ce qui ramène le nombre des points B distincts à une simple infinité.

Lorsqu'il s'agit de l'involution I_3^4, la connaissance du point B détermine entièrement la courbe J_2 qui y passe. Nous trouvons donc, par le secours du faisceau de coniques J_2, une simple

infinité de quaternes de l'involution I_3^4; il en existe une double infinité qui échappe à cette construction.

De là résulte que la connaissance de quatre quaternes de points d'une involution I_3^4 ne permettra pas, dans tous les cas, de construire les points de base, comme conséquence de la théorie que nous avons exposée; car un ou plusieurs des quatre quaternes peut appartenir à la double infinité qui ne résulte pas immédiatement de ces points.

9. Sur les groupes singuliers. — En étudiant les courbes du faisceau répondant à l'équation (10), on pourrait trouver des groupes à éléments remarquables de l'involution I_{2p-1}^{2p}.

S'agit-il, par exemple, de *groupes ayant deux éléments coïncidents*, il faut alors que l'équation jacobienne

$$J_n \equiv \begin{vmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 & x_2^1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ (1,1) & (1,2) & (2,2) \end{vmatrix} = 0$$

possède deux racines égales. Ce fait est exprimé en annulant le discriminant de cette équation.

Nous obtenons par là une équation d'ordre $2(2p-1)$ en b_0, b_1, b_2, car chacun des coefficients de l'équation ci-dessus est du premier ordre par rapport à ces quantités.

La substitution

$$b_2 : -2b_1 : b_0 = \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 \qquad (15)$$

convertit cette nouvelle équation en celle d'une courbe D_p, d'ordre $2(2p-1)$.

Tout point de cette courbe est un point B auquel se rapporte une courbe J_p du faisceau; cette dernière est tangente à la conique C_2 en un point au moins, réel ou non.

Cette remarque, appliquée à l'involution I_1^2, nous rend l'équation

$$(a_0\zeta_1 + a_1\zeta_2 + a_2\zeta_3)^2 + (a_0a_2 - a_1^2)(\zeta_2^2 - 4\zeta_1\zeta_3) = 0$$

de la courbe C, rencontrée au numéro 7, formée par les deux tangentes menées à la conique support par le point central.

Appliquée à l'involution I_3^4, elle donne pour D_p une courbe du sixième degré. Cette courbe est rencontrée par une conique J_2, correspondant à l'un de ses points, selon douze points ; l'un de ceux-ci étant connu, les onze autres s'en déduisent par la construction d'une même conique J_2. Ainsi les coniques J_2 tangentes à C_2 marquent sur la courbe particulière D_4 des groupes de points en involution du douzième ordre et de premier rang.

Les douze intersections de la courbe D_4 et de la conique fondamentale marquent sur celle-ci les points de contact de douze coniques J_2.

— *Dans l'involution* I_3^4 *nous obtenons des quaternes possédant des éléments triples* en exprimant que l'équation jacobienne ci-dessus, actuellement du quatrième degré, a une racine triple.

Pour cela, il nous faudra annuler les invariants de la forme biquadratique constituant le premier membre.

Ces invariants sont l'un du second, l'autre du troisième degré par rapport aux coefficients de la forme et, par suite aussi, par rapport à b_0, b_1, b_2; ainsi, la substitution (15) convertira ces invariants en l'équation d'une conique et en celle d'une cubique.

Et les points d'intersection de ces deux courbes, au nombre de six, donneront les points B qui déterminent les coniques J_2 osculatrices à la conique fondamentale.

L'invariant du troisième ordre de la forme biquadratique considérée est précisément le discriminant de la conique J_2 correspondante. Les coniques J_2 osculatrices à C_2 sont donc décomposables ; leur point d'osculation est le point double et celui-ci ne peut être qu'un des points de base du faisceau de courbes J_2. Ainsi donc, dans le cas considéré, les points de base devraient être sur la conique C_2; s'il en était autrement, il n'existerait aucune conique réelle du faisceau donnant des points triples de l'involution I_3^4.

La courbe correspondant au covariant cubique et qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} -2(a_0\zeta_2 + 2a_1\zeta_3) & a_0\zeta_1 - a_1\zeta_2 - 3a_2\zeta_3 & 2(a_1\zeta_1 - a_3\zeta_3) \\ a_0\zeta_1 - a_1\zeta_2 - 3a_2\zeta_3 & 2(a_1\zeta_1 - a_3\zeta_3) & 3a_2\zeta_1 + a_3\zeta_2 - a_4\zeta_3 \\ 2(a_1\zeta_1 - a_3\zeta_3) & 3a_2\zeta_1 + a_3\zeta_2 - a_4\zeta_3 & 2(2a_3\zeta_1 + a_4\zeta_2) \end{vmatrix} = 0$$

est donc le lieu des points B pour lesquels la conique jacobienne J_2 se décompose.

Or, chaque conique décomposable doit passer par le point B et les points P, P′, P″ de base; cette courbe cubique est donc constituée par l'ensemble des côtés du triangle P P′ P″ autopolaire commun aux coniques C_2 et K_2 (n° 7, II).

Mais si, dans l'équation précédente, on fait la substitution

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 = x_1^2 : 2x_1x_2 : x_2,$$

on obtient le covariant du sixième ordre de la forme biquadratique f_4; nous avons ainsi une démonstration géométrique, peut-être nouvelle, des propriétés bien connues du covariant considéré, savoir : les racines de ce covariant sont conjuguées deux à deux; il est le produit de trois formes quadratiques.

10. L'INVOLUTION I^{np}_{np-1} DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS. — La plupart des théories qui précèdent s'étendent facilement à l'espace à n dimensions, E_n.

On sait que les groupes d'une involution I^n_{n-1} du n^e ordre et de rang $(n-1)$ peuvent être représentés sur la courbe normale C_n de cet espace, par ses intersections avec les espaces linéaires à $(n-1)$ dimensions qui passent par un point fixe A.

Si les équations de la courbe normale C_n sont

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \dots \zeta_{n+1} = \lambda^n : \binom{n}{1}\lambda^{n-1} : \binom{n}{2}\lambda^{n-2} : \dots : 1,$$

et si le point A considéré est défini par les rapports

$$\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \dots \zeta_{n+1} = a_n : -\binom{n}{1}a_{n-1} : \binom{n}{2}a_{n-2} : \dots : \pm a_0,$$

l'espace linéaire $\mathcal{E}_{n-1}$, à $(n-1)$ dimensions, qui joint les points multiples d'ordre n de l'involution, a pour équation

$$a_0\zeta_1 + a_1\zeta_2 + a_2\zeta_3 + \dots + a_n\zeta_{n+1} = 0. \qquad (16)$$

Il est l'espace polaire du point A par rapport à la courbe C_n.

Tout espace linéaire $\mathcal{E}_{n-1}$ qui unit le point A à $(n-1)$ points donnés de C_n, rencontre encore la courbe en un point; celui-ci complète le groupe dont les $(n-1)$ points donnés font partie.

Enfin, si B, C,... L sont $(n-1)$ points quelconques de l'espace E_n, l'espace linéaire $\mathcal{E}_{n-1}$ qui les unit au point A rencontre évidemment C_n en un groupe de l'involution I^n_{n-1}.

Cet espace a pour équation

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & -\zeta_2 & \zeta_3 & \dots \pm \zeta_{n-1} \\ a_n & \binom{n}{1} a_{n-1} & \binom{n}{2} a_{n-2} \dots & a_0 \\ b_n & \binom{n}{1} b_{n-1} & \binom{n}{2} b_{n-2} \dots & b_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_n & \binom{n}{1} l_{n+1} & \binom{n}{2} l_{n-2} \dots & l_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons encore que la formule (16) découle de la forme binaire

$$f_n \equiv a_x^n \equiv a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots + a_n x_2^n,$$

égalée à zéro par la substitution

$$x_1^n : \binom{n}{1} x_1^{n-1} x_2 : \binom{n}{2} x_1^{n-2} x_2^2 : \dots : x_2^n = \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \dots \zeta_{n+1}. \qquad (17)$$

11. La même substitution permet de convertir toute forme binaire f_{np}, d'ordre np en l'équation d'ordre p d'une hypersurface S_p contenue dans l'espace E_n.

Cette hypersurface rencontre C_n en np points. Ce sont les images des racines de l'équation $f_{np} = 0$ et les points multiples d'ordre np de l'involution I^{np}_{np-1}, d'ordre np et de rang $(np-1)$.

Nous pourrons supposer que, l'involution I^{np}_{np-1} étant fixée, l'hypersurface S_p est connue.

Pour obtenir l'équation de S_p, il suffit d'exprimer d'abord f_{np} en fonction de ses dérivées d'ordre $n(p-1)$; de regarder celles-ci comme constantes et d'exprimer la nouvelle forme, d'ordre $nP = n(p-1)$, en fonction de ses dérivées d'ordre $n(P-1)$, et ainsi de suite. Le résultat définitif, qui ne renferme plus que des groupements d'ordre n des variables x_1 et x_2, permet d'appliquer aisément la substitution marquée par les formules (17).

Soit

$$f_{np}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n+1}) = 0$$

l'équation ainsi obtenue de l'hypersurface S_p, et appelons ξ'_1, ξ'_2, $\dots$ ξ'_{n+1} les coordonnées d'un point Z de l'espace E_n.

Les espaces linéaires à $(n-1)$ dimensions, polaires de ce point relativement à la courbe C_n et à l'hypersurface S_p, ont respectivement pour équations

$$\xi_1\xi'_{n+1} - \binom{1}{n}\xi_2\xi'_n + \binom{2}{n}\xi_3\xi'_{n-1} - \dots \pm \xi_{n+1}\xi'_1 = 0,$$

$$\xi_1 \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} + \xi_2 \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n-1}\partial x_2} + \dots + \xi_{n+1}\frac{\partial^n}{\partial x_2^n} = 0,$$

où il est entendu que les dérivées, qui sont relatives à $f_{np}(\zeta_1, \dots \zeta_{n+1})$, ont subi la substitution (17), les quantités ζ y étant affectées d'accents.

Si nous considérons en outre les espaces linéaires $b, c, \dots l$, polaires de $(n-1)$ points donnés B, C, $\dots$ L par rapport à C_n

$$b_0\xi_1 + b_1\xi_2 + \dots + b_n\xi_{n+1} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$l_0\xi_1 + l_1\xi_2 + \dots + l_n\xi_{n+1} = 0,$$

l'équation du lieu des points Z tels que les $(n-1)$ espaces polaires envisagés, soient concourants est

$$\begin{vmatrix} \zeta_{n+1} & -\binom{1}{n}\zeta_n & \binom{2}{n}\zeta_{n-1} & \cdots & \pm\zeta_1 \\ \dfrac{\partial^n}{\partial x_1^n} & \dfrac{\partial^n}{\partial x_1^{n-1}\partial x_2} & \dfrac{\partial^n}{\partial x_1^{n-2}\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^n}{\partial x_2^n} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_0 & l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

L'hypersurface Σ_p ainsi obtenue, d'ordre p, rencontre C_n en np points; ceux-ci ont pour paramètres les racines de la forme binaire

$$F_{np} \equiv \begin{vmatrix} x_2^n & -x_2^{n-1}x_1 & x_2^{n-2}x_1 & \cdots & \pm x_1^n \\ \dfrac{\partial^n}{\partial x_1^n} & \dfrac{\partial^n}{\partial x_1^{n-1}\partial x_2} & \dfrac{\partial^n}{\partial x_1^{n-2}\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^n}{\partial x_2^n} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_0 & l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

— En particulier, pour l'espace euclidien, n égale trois et le premier membre de l'équation (18) est un déterminant du quatrième ordre. La surface qu'elle représente passe par la droite joignant les points B et C.

Cette surface peut être obtenue par un raisonnement analogue à celui qui est employé au numéro 4.

Soit Q un point de l'intersection des plans b et c, polaires de B et C par rapport à la cubique gauche C_3, ici courbe normale. Supposons-en construite la surface $(p-1)^e$ polaire par rapport à S_p et le plan polaire relatif à la courbe normale.

Cette surface et ce plan se coupent suivant une courbe d'ordre $(p-1)$ située tout entière sur la surface Σ_p, car les plans polaires de chacun de ses points, pris par rapport à S_p et à C_3, concourent au point Q.

12. Pour que le groupe des np points obtenus par l'intersection de Σ_p et de C_n soit un groupe de l'involution I^{np}_{np-1}, il faut et il suffit que l'on ait

$$(f_{np}, F_{np})^{np} = 0.$$

L'invariant qui constitue le premier membre de cette relation peut se déduire de la forme (19) en substituant aux groupements de variables

$$x_1^{np}, \quad x_1^{np-1}x_2, \quad x_1^{np-2}x_2^2, \quad \ldots \; x_1x_2^{np-1}, \quad x_2^{np}, \tag{20}$$

respectivement les constantes

$$a_{np}, \quad -a_{np-1}, \quad a_{np-2}, \; \ldots \; (-1)^{np-1}a_1, \quad (-1)^{np}a_0. \tag{21}$$

Développons le déterminant (19) par la règle de Laplace, l'une des séries de déterminants partiels étant formée avec les deux premières lignes.

Il nous suffira de voir ce que deviennent ces déterminants par la substitution ci-dessus et même de borner cette vérification au premier d'entre eux, qui peut s'écrire

$$x_2^{n-1}\left[x_1\frac{\partial^n f_{np}}{\partial x_1^n} + x_2\frac{\partial^n f_{np}}{\partial x_1^{n-1}\partial x_2}\right],$$

ou bien

$$x_2^{n-1}\frac{\partial^{n-1} f_{np}}{\partial x_1^{n-1}}.$$

Cette dernière expression ne renferme que des groupements de la forme (20), et il est évident que la substitution marquée par les formules (20) et (21) peut y être faite.

Si n est pair, quel que soit p, elle devient identiquement nulle; car la dérivée $\dfrac{d^{n-1}}{dx_1^{n-1}}$ est une forme binaire d'ordre impair $(np - n + 1)$. La substitution revient à chercher l'invariant quadratique de cette forme; il est identiquement nul.

Si n est impair en même temps que p, l'ordre $(np - n + 1)$ est aussi impair et les mêmes conclusions ont lieu.

Mais si, au contraire, p est pair, l'ordre de la fonction dérivée est pair et l'invariant quadratique d'une forme binaire d'ordre pair n'est pas nul.

On conclut de là, aisément, dans quel cas les intersections de l'hypersurface Σ_p avec la courbe C_n donnent sur celle-ci des groupes de l'involution I^{np}_{np-1}.

— Ainsi, dans l'espace ordinaire, nous aurons sur la cubique gauche l'image de groupes des involutions d'ordre $3(2k + 1)$ et de rang $2(3k + 1)$; dans l'espace à quatre dimensions, ce sont des groupes d'involutions d'ordre $4p$ que nous pourrons obtenir.

Tous les groupes des involutions considérées ne se présentent pas, en général, sauf pour $p = 1$. A cause du choix arbitraire des points B, C, ... L, on a une infinité d'ordre $(n - 1)$ de groupes.

13. Les hypersurfaces Σ_p passent par des points de base dont nous déterminons le nombre en cherchant l'ordre du système

$$\frac{\zeta_{n+1}}{\dfrac{\partial^n f_{np}}{\partial x_1^n}} = \frac{\zeta_n}{-\binom{n}{1}\dfrac{\partial^n f_{np}}{\partial x_1^{n-1}\partial x_2}} = \frac{\zeta_{n-1}}{\binom{n}{2}\dfrac{\partial^n f_{np}}{\partial x_1^{n-2}\partial x_2^2}} = \cdots = \frac{\zeta_1}{\pm\dfrac{\partial^n f_{np}}{\partial x_2^n}}.$$

Car si, dans l'équation (18), nous remplaçons les quantités qui entrent ici aux numérateurs par les dénominateurs correspondants, cette équation est vérifiée. Les points communs aux courbes qui répondent à ces rapports sont donc les points de base.

Des théorèmes connus d'algèbre (*) donnent pour l'ordre du système le nombre

$$(p-1)^n + (p-1)^{n-1} + \cdots + (p-1)^0 \quad \text{ou} \quad \frac{(p-1)^{n+1} - 1}{p-2}.$$

(*) Voir le renvoi de la page 16.

parce que les fonctions qui entrent en dénominateurs sont d'ordre $(p-1)$ et qu'il y a $(n+1)$ variables ζ; il est entendu, en effet, que, dans les dénominateurs, la substitution (17) a été faite.

En particulier, dans l'espace à trois dimensions, l'équation (18), pour $p \equiv 3$ par exemple, représente une surface du troisième ordre dont les intersections avec la cubique gauche marquent un groupe de points de l'involution du neuvième ordre et du huitième rang.

Cette surface passe par la droite joignant les points B et C choisis arbitrairement dans l'espace et par un ensemble de quinze points fixes servant de base à une infinité de surfaces analogues, obtenues en faisant varier la situation des points B et C.

Il y aurait peut-être lieu d'étudier de près cette surface cubique, en se servant plus spécialement des propriétés de l'involution I_8^9.

14. En appliquant actuellement aux résultats qui précèdent les théories exposées dans notre Mémoire (*) intitulé : « *Sur une correspondance entre les espaces à* n *et à* (2n − 1) *dimensions* », nous verrions qu'ils peuvent être étendus à ce dernier espace, dans lequel nous obtenons ainsi la représentation de groupes de l'involution I_{np-1}^{np}.

NOTE.

Lorsque la forme

$$f_1 \equiv b_x \equiv b_0 x_1 + b_1 x_2$$

a pour racine le paramètre λ d'un point d'un groupe de l'invo-

---

(*) *Mémoires de la Société royale des sciences de Liége,* 3e série, t. IX.

lution I_{2p-1}^{2p}, l'ensemble des $(2p-1)$ points complétant ce groupe vérifie la relation

$$(ab)\, a_{x_2} a_{x_3} \dots a_{x_{2p}} = 0. \qquad (22)$$

Les points multiples d'ordre $(p-1)$ de l'involution d'ordre $(2p-1)$ et de rang $(2p-2)$, I_{2p-2}^{2p-1}, définie par la formule précédente sont racines de l'équation

$$(ab)\, a_x^{2p-1} = 0,$$

dont le premier membre est le jacobien de f_{2p} et de f_1.

Construisons donc la courbe K_p correspondant à l'équation

$$(f_{2p}, f_1^2)^1 = 0,$$

courbe dont le point B est sur C_2 et y a pour paramètre λ. Comme cette dernière équation s'écrit encore

$$(ab)\, a_x^{2p-2} b_x = 0,$$

les $(p-1)$ intersections restantes sont les images des points multiples d'ordre $(2p-1)$ de l'involution I_{2p-2}^{2p-1}.

Supposons actuellement que le point B considéré ici soit un des $(2p-1)$ points donnés d'un groupe de l'involution I_{2p-1}^{2p}, et qu'il s'agisse de compléter le groupe.

Il suffit, pour cela, d'envisager les $(2p-2)$ points donnés, autres que B, comme formant un groupe de l'involution I_{2p-2}^{2p-1} dont nous venons de trouver les points multiples d'ordre $(2p-1)$.

Par la formule (22), on voit que la solution du problème proposé revient à rechercher, dans l'involution I_{2p-2}^{2p-1}, le point qui complète le groupe dont les $(2p-2)$ points restants feraient partie.

Supposons encore que le point B représente un élément donné

d'un groupe de $2p$ points de l'involution d'ordre $2p$ et de premier rang, I_1^{2p}, définie par $(2p-1)$ équations de la forme

$$a_{x_1}a_{x_2}\ldots a_{x_{2p}}=0.$$

En construisant les courbes J_p correspondant à ce point B et aux $(2p-1)$ involutions I_{2p-1}^{2p}, qui répondent à ces équations, on marque les points multiples d'ordre $(2p-1)$ de $(2p-1)$ involutions I_{2p-2}^{2p-1}.

Le problème qui consiste à trouver le groupe de $(2p-1)$ points correspondant au point B dans l'involution I_1^{2p} se ramène donc à celui-ci : construire le groupe de $(2p-1)$ points communs à $(2p-1)$ involutions I_{2p-2}^{2p-1} dont on donne les points multiples d'ordre $(2p-1)$.

SUR

QUELQUES SURFACES RÉGLÉES

PAR

Jean DEGUELDRE

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE TOURNAI.

SUR

QUELQUES SURFACES RÉGLÉES

Je me propose d'étudier la surface engendrée par la perpendiculaire commune à deux droites a et b, dans les cas suivants :

1° a est fixe, b un rayon quelconque d'un faisceau $[b]$.

2° a est fixe, b une génératrice variable d'un système réglé V.

3° a et b sont des rayons homologues de deux faisceaux projectifs $[a]$, $[b]$.

4° a et b sont des rayons homologues d'un faisceau $[a]$ et d'un système réglé V projectifs.

5° a et b sont des rayons homologues de deux systèmes réglés projectifs V, V_1.

Je désignerai par g la perpendiculaire commune à a et b, par A et B ses pieds; la surface engendrée par g et les courbes décrites par les points A, B seront représentées par (g), (A), (B).

I.

1. *La perpendiculaire commune à une droite fixe* a *et à un rayon variable* b *d'un faisceau engendre un conoïde de Plücker.*

Bien que cette surface soit connue, nous y consacrons quelques développements. Soient $AB \equiv g$ la perpendiculaire commune, E le centre du faisceau $[b]$. En un point quelconque O de a, menons un plan π perpendiculaire à a; soient E′, B′ les projections de E, B sur π, B_1 le point de rencontre de b avec π. La projection OB′ de AB sera perpendiculaire à la projection $E'B_1$ de b; par suite, le lieu de B′ est la circonférence de diamètre OE′, et le lieu de B est l'ellipse suivant laquelle le cylindre droit construit sur cette circonférence est coupé par le plan du faisceau $[b]$.

On retrouve ainsi la génération du conoïde de Plücker prise ordinairement pour définition de cette surface.

Remarque. — Dans la suite, nous construirons souvent la perpendiculaire commune aux deux droites a, b comme intersection de deux plans α, β menés respectivement par a et par b, et parallèles à la direction qui est à la fois perpendiculaire aux directions de a et b.

Dans le cas actuel, si l'on mène par E une parallèle a' à a et qu'on élève en E une perpendiculaire p au plan ba', la droite g sera l'intersection du plan $bp \equiv \beta$ avec le plan α mené par a parallèlement à p. La droite p engendre un faisceau projectif avec le faisceau $[b]$; donc le plan β enveloppe un cône du second ordre.

Par conséquent, la surface (g) est le lieu de l'intersection des éléments homologues d'un faisceau de plans $[\alpha]$ et du faisceau $[\beta]$ de plans tangents à un cône quadratique, ces deux faisceaux étant rapportés projectivement l'un à l'autre.

Cas particuliers. — 1° Si a passe par le sommet du faisceau, le lieu géométrique de la perpendiculaire commune est un plan perpendiculaire à a.

2° Si a est parallèle au plan du faisceau, la surface (g) se compose du plan aE et du plan mené par a perpendiculairement au plan du faisceau.

II.

2. Lemme. — *Les droites qui projettent un point P sur les génératrices d'un même mode d'une quadrique réglée sont les génératrices d'un cône* Λ *du quatrième ou du troisième ordre selon que la quadrique est un hyperboloïde ou un paraboloïde; lorsque P appartient à la quadrique,* Λ *est du troisième ordre pour l'hyperboloïde et du second pour le paraboloïde* (*).

3. *Le lieu géométrique de la perpendiculaire commune à une droite fixe* a *et à une génératrice variable* b *d'un même système d'un hyperboloïde V est un conoïde du sixième ordre. Le lieu du pied de la perpendiculaire sur* b *est une biquadrique gauche de seconde espèce.*

Soient C le second point d'intersection de g avec V, K et L ceux de a avec V.

Les droites g passant par un point A de a sont situées dans un plan perpendiculaire à a. Ce plan coupe le cône Λ de sommet A (**2**) suivant quatre droites g. Le lieu du pied B de la perpendiculaire commune est donc une biquadratique gauche; elle est de seconde espèce puisqu'elle ne rencontre qu'une seule fois chacune des génératrices considérées.

Cette courbe passe par K et L. Un plan quelconque mené par a la coupe en deux points non situés sur a; il contient donc deux droites g parallèles. La droite i à l'infini des plans perpendicu-

---

(*) Neuberg et Degueldre, *Sur quelques lieux géométriques dans l'espace.* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 3e sér., t. VIII.)

laires à a, est une *directrice double* du conoïde, tandis que a en est une *directrice quadruple;* le conoïde est du sixième ordre (*)

La courbe d'intersection de V avec le conoïde étant du douzième ordre, le lieu géométrique du point C est une courbe gauche du huitième ordre.

Le plan normal en K à a coupe le cône Λ de sommet K suivant trois droites k_1, k_2, k_3 qui sont des droites g; la quatrième droite g est la perpendiculaire k_4 au plan mené par a et par la génératrice de V passant par K. Il en résulte que K est un point C pour k_1, k_2, k_3 et un point B pour k_4; en d'autres termes, c'est un point simple de la courbe (B) et un point triple de la courbe (C).

La courbe (C) passe deux fois par chacun des points d'intersection de la directrice à l'infini i avec V : car, par chacun de ces points, passent deux droites g.

4. Pour trouver l'ordre de la surface (g), on peut s'appuyer sur le lemme ci-après qui interviendra encore dans plusieurs autres questions; cette proposition, avec ses démonstrations, nous a été communiquée par M. Neuberg.

Appelons *cône directeur d'une développable,* l'enveloppe des plans menés par un même point S parallèlement aux plans tangents de cette surface.

Lemme. — *Le cône directeur d'une développable W est généralement de la même classe que cette surface. Il subit une diminution de une, deux, trois... unités si le plan de l'infini est un plan tangent simple, double, triple... de la développable.*

En effet, soit Sx une droite quelconque menée par le sommet S du cône directeur. La classe de ce cône est le nombre des plans tangents qu'on peut lui mener par Sx ou par le point à

(*) En général, si entre deux ponctuelles $[u]$, $[v]$ on établit une correspondance (m, n), la droite qui en joint deux points homologues engendre une surface d'ordre $m + n$.

l'infini de cette droite. A chacun de ces plans il correspond un plan tangent parallèle mené à la développable. Donc celle-ci est de la même classe que le cône.

Cependant, si la développable touche p fois le plan de l'infini, sa classe sera supérieure de p unités à celle du cône directeur.

Voici une démonstration analytique du même théorème. Posons

$$P_r \equiv A_r x + B_r y + C_r z + D_r t, \qquad Q_r \equiv A_r x + B_r y + C_r z,$$

x, y, z, t étant des coordonnées cartésiennes homogènes.

Une développable de la classe n est l'enveloppe d'un plan mobile dont les paramètres sont des fonctions de degré n d'un paramètre variable ρ; soit

$$P_0 + P_1\rho + P_2\rho^2 + \ldots + P_n\rho^n = 0 \qquad (1)$$

l'équation de ce plan. Le cône directeur, dont nous plaçons le sommet en l'origine des coordonnées, est l'enveloppe du plan

$$Q_0 + Q_1\rho + Q_2\rho^2 + \ldots + Q_n\rho^n = 0. \qquad (2)$$

On voit que généralement il est de la classe n.

Cependant, si les polynômes

$$\left.\begin{aligned} &A_0 + A_1\rho + A_2\rho^2 + \ldots + A_n\rho^n, \\ &B_0 + B_1\rho + B_2\rho^2 + \ldots + B_n\rho^n, \\ &C_0 + C_1\rho + C_2\rho^2 + \ldots + C_n\rho^n, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

avaient un facteur commun $\rho - \rho_1$ et que l'on désigne par α, β, γ leurs quotients par $\rho - \rho_1$, les équations (1) et (2) prendraient la forme

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)(\rho - \rho_1) + (D_0 + D_1\rho + \ldots + D_n\rho^n)t = 0, \qquad (4)$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0. \qquad (5)$$

On voit par là que la développable admet, pour $\rho = \rho_1$, le plan de l'infini pour plan tangent (*), et que le cône directeur n'est plus que de la classe $n - 1$.

Si les polynômes (5) avaient p facteurs $\rho - \rho_1$, $\rho - \rho_2$, ... $\rho - \rho_p$ communs, le plan de l'infini toucherait la développable p fois, et le cône directeur serait de la classe $n - p$.

5. Cela posé, en un point S de a, menons des parallèles aux génératrices de V; elles engendrent le *cône directeur* de V, que nous appelons *cône S*.

Menons par S la parallèle b' à b; la perpendiculaire p menée par S au plan ab' est parallèle à g; la droite g est l'intersection du plan $ab' \equiv \alpha$ avec le plan β mené par b parallèlement à p.

Étudions d'abord les particularités que peut présenter la droite p; elles se répercuteront sur le conoïde. Un plan mené par a coupe le cône S suivant deux génératrices b', b'_1; soient b, b_1 les génératrices correspondantes de V. La droite p perpendiculaire à a et b' est aussi perpendiculaire à b'_1; il en résulte que les perpendiculaires communes à a et b ou a et b_1 sont parallèles et par suite situées dans un même plan passant par a. La droite p engendre un faisceau dont le plan est perpendiculaire à a; on peut appeler ce faisceau *faisceau directeur* du conoïde; il doit être considéré comme *double*, puisqu'à un rayon p correspondent deux génératrices b, b_1 de V et par suite deux positions de g. Ceci démontre de nouveau que la directrice i est double.

Les droites b', b'_1 peuvent être confondues; en effet, les génératrices de contact h', h'_1 des plans tangents menés par a au cône S satisfont à cette condition.

Le plan $b'p$ enveloppe un cône de la quatrième classe. En effet, si l est une droite quelconque menée par S, il existe entre les plans $lp \equiv \mu$ et $lb' \equiv \nu$ une correspondance (2,2); car à une

---

(*) En faisant tendre ρ vers ρ_1, on voit que ce plan tangent peut être considéré comme parallèle au plan représenté par l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, où l'on remplace ρ par ρ_1.

droite p correspondent deux génératrices b', b'_1 du cône S, d'où deux plans ν, et un plan ν coupe le cône suivant deux génératrices à chacune desquelles il correspond une droite p.

Il résulte de là que le plan β enveloppe une développable de la quatrième classe (**4**).

Cela posé, cherchons l'ordre du conoïde (g) en déterminant le nombre des droites g qui rencontrent une droite quelconque u. Les plans α et β qui se coupent suivant une droite g, rencontrent u en deux points X, Y entre lesquels il existe une correspondance (4,2). En effet, si l'on donne X, on connaîtra le plan $\alpha \equiv ap$ et par suite p; mais à p correspondent deux génératrices b', b_1' du cône S, donc aussi deux génératrices b, b_1 de V, d'où deux plans β. Donnons-nous maintenant le point Y : il passe par ce point quatre plans tangents à la développable, enveloppe des plans β, d'où quatre plans correspondants α.

Les six coïncidences de la correspondance entre X et Y sont six points de u appartenant au conoïde (*).

Cherchons les *génératrices doubles* du conoïde (g). Elles sont de deux espèces :

1° Les droites g étant parallèles deux à deux, il peut arriver qu'une génératrice coïncide avec sa parallèle. Les droites b', b_1' définies précédemment se correspondent sur le cône S dans une involution ayant pour éléments doubles les génératrices de contact h', h'_1 des plans tangents menés par a au cône S. De là, deux droites doubles du conoïde.

Si g_1 désigne l'une de ces droites, le plan ag_1 rencontre la biquadrique (B) en deux points différents de K et L confondus sur g_1 ; autrement dit, le plan ag_1 contient une tangente à la courbe (B).

(*) Un raisonnement semblable établit la proposition suivante, plus générale et analogue au lemme (**10**) : *Si l'on établit entre les plans tangents* α *et* β *à deux développables* Σ_a, Σ_b *respectivement des classes* m *et* n *une correspondance* (1, 1), *la droite* $\alpha\beta$ *suivant laquelle se coupent deux plans homologues, engendre une surface dont la classe est* m + n. Cependant, si Σ_a et Σ_b ont des éléments unis, l'ordre de la surface engendrée par la droite $\alpha\beta$ subit une réduction d'une unité pour chaque élément uni.

2° On a vu qu'une droite p est perpendiculaire à deux génératrices b', b'_1 du cône S; il peut arriver que les génératrices b, b_1 de V et la droite a aient la même perpendiculaire commune. Les pieds B, B_1 de cette perpendiculaire appartiennent à la courbe (B) et à la courbe (C), de sorte que BB_1 est bisécante commune.

Les droites b, b_1 marquent sur une génératrice c du second mode de V une involution caractérisée par une équation symétrique du premier degré, de la forme

$$a\rho\rho_1 + b(\rho + \rho_1) + c = 0, \qquad (1)$$

où ρ et ρ_1 désignent des paramètres qui fixent les points de rencontre de b et b_1 avec c.

Soient d, d_1 deux génératrices de V telles que les perpendiculaires communes à (a, d) et à (a, d_1) rencontrent a au même point A. Si l'on donne d, le point A est connu et on a trois autres droites g partant de A, et par suite trois droites d_1. Réciproquement, si l'on donne d_1, on a trois droites correspondantes d; on en conclut, en appelant ρ, ρ_1 les paramètres qui fixent les points de rencontre de d, d_1 avec c, que ces paramètres sont liés par une équation du troisième degré par rapport à chacun de ces paramètres et symétrique en ρ et ρ'. Cette équation symétrique donne une relation qui est du troisième degré par rapport aux deux quantités $\rho\rho'$, $\rho + \rho'$; avec l'équation (1), elle donne trois solutions pour les inconnues $\rho\rho'$, $\rho + \rho'$ et partant trois couples b, b_1 vérifiant la condition que les perpendiculaires communes à (a, b) et à (a, b_1) ont le même pied sur a

Remarque. — Supposons que les plans perpendiculaires à a rencontrent V suivant des hyperboles. Les asymptotes de ces hyperboles sont parallèles aux génératrices k, k' suivant lesquelles le plan perpendiculaire en S à a rencontre le cône directeur S. Les droites k et k' sont aussi des rayons du faisceau $[p]$, et les plans menés en S perpendiculairement à k ou à k' rencontrent le cône S suivant deux génératrices l', l'_1 ou m', m'_1;

soient l, l_1, m, m_1 les génératrices de V parallèles à l', l'_1, m', m'_1. Alors les perpendiculaires communes à (a, l), (a, l_1), (a, m), (a, m_1) recoupent V à l'infini; on a ainsi les points doubles à l'infini de la courbe (C).

6. Appelons b et c deux génératrices de modes différents de V, et soient Σ_b, Σ_c les conoïdes correspondants (g) pour la même droite a. Un plan quelconque π passant par a contient, indépendamment de a, deux génératrices de chacun des conoïdes. Ces droites étant parallèles, le plan π est un plan tritangent commun à Σ_b et Σ_c; quatre des points de contact appartiennent à a et les deux autres sont réunis sur la directrice i à l'infini.

Cherchons l'intersection de Σ_b et Σ_c Elle comprend d'abord la directrice quadruple a et la directrice double i. Ensuite, si E est un point quelconque de cette intersection, la perpendiculaire q abaissée de E sur a est nécessairement une génératrice commune aux deux conoïdes et doit rencontrer normalement deux génératrices b, c de systèmes différents de V, ce qui ne peut avoir lieu que si b et c se rencontrent en un point M de q ou sont parallèles.

Dans la première hypothèse, le plan tangent en M à V est parallèle à a Soient U le cylindre circonscrit à V dont les génératrices sont parallèles à a, W la courbe de contact, W′ la projection de W sur un plan π perpendiculaire à a en un point F, M′ la projection de M sur π. Il est facile de voir que FM′ est normale à W′. Comme il part de F quatre normales à W′, il existe quatre normales à V qui rencontrent normalement a (*).

Dans la seconde hypothèse, soient B′, C′ les pieds sur a des perpendiculaires communes aux couples (a, b), (a, c). Les points B′, C′ liés par une correspondance $(4, 4)$ coïncideront huit fois, d'où huit génératrices communes à Σ_b et Σ_c Ces droites sont tangentes au cône asymptote de V; car chacune d'elles est située dans le plan de deux génératrices parallèles de V.

(*) Il suit de là que les normales à une quadrique centrée le long d'une section diamétrale engendrent une surface du quatrième ordre.

7. Si a est parallèle à une génératrice a_1 de V, le plan de ces deux droites se détache de la surface. De plus, si J désigne le point d'intersection à l'infini de a avec a_1, il y a en J une infinité de perpendiculaires communes à a et a_1 Le plan de l'infini se détache également de la surface, et le conoïde (g) est maintenant du quatrième ordre.

Par un point de a il ne passe plus que trois droites g et il n'existe plus qu'une droite g de direction donnée. Par suite, a est une directrice triple et i une droite simple, ce qui confirme que le conoïde est du quatrième ordre.

L'ordre de la surface, dans ce cas particulier, peut également s'établir par un raisonnement déjà employé dans le cas général.

La droite a étant génératrice de V est aussi génératrice du cône S. Tout plan passant par a coupe le cône S suivant une génératrice b', autre que a; soit p la perpendiculaire au plan ab'. Appelons μ, ν les plans menés par une droite quelconque Sx, l'un par p et l'autre par b'. Si l'on donne μ, p est l'intersection de μ avec le plan perpendiculaire en S à a; le plan perpendiculaire en S à p coupe le cône S suivant a et une deuxième génératrice b' du cône S; il faut négliger a qui est fixe; donc à un plan μ correspond un seul plan ν. Mais un plan ν coupe le cône S suivant deux génératrices b', b'_1 auxquelles correspondent deux génératrices b, b_1 de V.

La correspondance entre μ et ν est donc (2,1); les trois coïncidences de la correspondance (μ, ν) sont les plans tangents à l'enveloppe des plans $b'p$. Les plans bp ont aussi une enveloppe de la troisième classe (4).

La perpendiculaire en S au plan tangent mené par a au cône S indique la direction de la perpendiculaire commune à a et à la génératrice infiniment voisine sur V de a_1.

Cela posé, soient X, Y les points de rencontre des plans α, β avec une droite quelconque u. X, Y, liés par une correspondance (3, 1), coïncideront quatre fois.

Le conoïde est donc du quatrième ordre.

8. *La perpendiculaire commune à deux génératrices d'un même système d'un hyperboloïde* V *dont l'une* a *est fixe et l'autre*

variable, engendre un conoïde du troisième ordre. L'intersection de ces surfaces se compose de la droite a, *de deux génératrices de* V *normales à* a *et d'une conique.*

En effet, un plan mené par un point A de a perpendiculairement à a coupe le cône A de sommet A suivant trois droites dont deux seulement font partie du conoïde; car il faut écarter celle de ces droites qui touche l'hyperboloïde en A.

Donc a est maintenant une directrice double. La droite i est une directrice simple; car si a' et b' sont les génératrices du cône asymptote de V parallèle à a et b, la perpendiculaire commune à a et b est parallèle à la perpendiculaire p élevée par le centre O de V sur le plan $a'b'$, et réciproquement, si l'on donne la direction d'une droite g, le plan perpendiculaire à cette direction et mené par O passe par a' et coupe le cône asymptote suivant une droite b' qui donne la direction de b. Il suit de là (note du § 3) que le conoïde est du troisième ordre (conoïde de Plucker).

Tout plan normal à a donne deux points B; donc la courbe (B) est une conique.

Pour déterminer le point où elle rencontre a, imaginons que b se déplace et décrive V. Lorsque b coïncide avec a, le plan $a'b'$ est tangent au cône asymptote; la droite g correspondante est donc perpendiculaire au plan aO. De plus, cette droite g rencontrant deux génératrices confondues est tangente à V.

D'autre part, les tangentes à V menées par les différents points de a perpendiculairement à cette droite, engendrent un paraboloïde hyperbolique puisqu'on n'obtient qu'une seule de ces droites dans un plan passant par a. La droite considérée s'obtiendra donc en cherchant la seconde droite de ce paraboloïde située dans le plan mené par a perpendiculairement au plan aO.

En menant par le sommet O du cône asymptote de V un plan perpendiculaire à a, on obtient les directions de deux génératrices perpendiculaires à a. Soit c l'une de ces génératrices : elle est elle-même perpendiculaire à deux génératrices a et a' de même mode; elle fait donc partie du conoïde (g).

9. Si l'on remplace l'hyperboloïde V par un paraboloïde V′, la droite a étant quelconque, le cône Λ ayant pour sommet un point quelconque de a n'est plus que du troisième ordre et le pied de la perpendiculaire commune décrit une cubique gauche passant par les deux points d'intersection de a et V′ : le conoïde est donc du quatrième ordre.

Supposons maintenant que a soit une génératrice de V′. Soit b une génératrice du système a et π son plan directeur. La perpendiculaire g à a et b est perpendiculaire au plan π. La droite g décrit donc le plan mené par a perpendiculairement à π et le pied B de g décrit la seconde génératrice de V′ située dans ce plan.

III.

10. Lemme. — *Si l'on établit entre les génératrices* a *et* b *de deux cônes* U_a, U_b *de même sommet* S *et respectivement de degrés* m *et* n *une correspondance* (1, 1), *le plan* ab *qui passe par deux génératrices correspondantes enveloppe un cône dont la classe est* m + n.

En effet, soit v une droite quelconque menée par S. La correspondance entre les plans $va \equiv \lambda$, $vb \equiv \nu$ est du genre (n, m); car le plan λ coupe U_a suivant m génératrices à chacune desquelles correspond une génératrice de U_b; par suite au plan va correspondent m plans vb. De même à un plan vb correspondent n plans va. Les $m + n$ coïncidences de la correspondance sont des plans menés par v et deux génératrices homologues de U_a et U_b.

Il importe d'observer que si U_a, U_b ont des génératrices homologues coïncidentes, la classe de l'enveloppe subit une réduction d'une unité pour chacune de ces coïncidences.

11. *Le lieu géométrique des perpendiculaires communes aux rayons homologues de deux faisceaux projectifs* [a], [b] *est une surface du sixième ordre.*

En effet, soient μ, ν les plans des faisceaux; M, N leurs sommets et a, b deux rayons correspondants. Menons par M une

parallèle b' à b; par N, une parallèle a' à a. Nous aurons ainsi en M deux faisceaux projectifs $[a]$, $[b']$; on sait que le plan ab' mené par deux rayons homologues enveloppe un cône quadratique Γ_a et que la perpendiculaire p au plan ab' en A engendre un cône du second ordre Γ_p. Ce dernier est le *cône directeur* de la surface. Semblablement le plan ba' enveloppe un cône quadratique Γ_b et la perpendiculaire q au plan ba' en B engendre un cône Γ_q.

La perpendiculaire commune à a et b est l'intersection des plans $ap \equiv \alpha$ et $bq \equiv \beta$. D'après le lemme (**10**), le plan α enveloppe un cône Γ_3 de troisième classe; il en est de même du plan β.

Cela posé, appelons X, Y les points d'intersection de deux plans correspondants α, β avec une droite quelconque u. Si l'on se donne le point X, on peut mener par la droite MX trois plans α tangents au cône Γ_3; à chacun de ces plans correspond un plan β. Donc il existe entre les points de X, Y une correspondance (3, 3), dont les six coïncidences sont des points de u où il passe une génératrice de la surface. Celle-ci est donc du sixième ordre.

Le plan μ contient deux génératrices; car il coupe le cône Γ_p suivant deux droites k_1, k_2; soient a_1, a_2, b_1, b_2 les rayons correspondants des faisceaux $[a]$, $[b]$; si b_1 et b_2 rencontrent la droite $\mu\nu$ en E_1, E_2, les parallèles à k_1 par E_1 et à k_2 par E_2 sont deux génératrices de la surface. On trouve de même deux génératrices dans le plan ν.

Les faisceaux $[a]$, $[b]$ marquent sur la droite $\mu\nu$ deux ponctuelles projectives; soient G_1, G_2 les points doubles. La perpendiculaire en G_1 au plan MNG_1 et la perpendiculaire en G_2 au plan MNG_2 appartiennent à la surface. Ces deux génératrices et les quatre situées dans les plans μ et ν sont les six droites de la surface s'appuyant sur la droite $\mu\nu$.

Cherchons les génératrices passant par M. Elles appartiennent au cône Γ_p et aussi au cône de sommet M et passant par la circonférence suivant laquelle le plan ν coupe la sphère de diamètre MN. Ces deux cônes ont quatre génératrices communes;

mais il faut en retrancher la perpendiculaire abaissée de M sur ν ; car cette perpendiculaire appartient visiblement au second cône; elle fait partie du premier comme étant perpendiculaire au rayon de $[a]$ parallèle à la ligne $\mu\nu$ et à son homologue dans le faisceau $[b]$, mais elle ne rencontre pas le second de ces rayons.

Les plans μ, ν rencontrent la surface (g), chacun suivant deux génératrices, et une quartique ayant un point triple en M ou N.

12. Cas particulier. — Si les parallèles par M et N à la ligne $\mu\nu$ sont des rayons correspondants des faisceaux $[a]$, $[b]$, on détachera de la surface le plan de ces droites et le plan de l'infini. Le lieu de g est actuellement du quatrième ordre.

On peut établir directement l'ordre de la surface (g) de la manière suivante : appelons m et n les parallèles menées par M et N à la ligne $\mu\nu$. Les faisceaux $[a]$ et $[b']$ ayant un rayon uni m sont perspectifs, et le plan ab' passe par une droite fixe m_1 ; la perpendiculaire p en M au plan ab' engendre un faisceau $[p]$ dont le plan est perpendiculaire à m_1. Semblablement, le plan $a'b$ fait partie d'un faisceau d'axe n_1 et la droite q engendre un faisceau $[q]$.

Le plan $ap \equiv \alpha$ enveloppe un cône quadratique; il en est de même du plan $bq \equiv \beta$.

Soient X, Y les points de rencontre d'une droite quelconque a avec les plans α, β. A un point donné X de u correspondent deux plans α (tangents à un cône quadratique), d'où deux rayons a, a_1 du faisceau $[a]$ et par suite deux rayons b, b_1 et deux plans β, β_1 Il y a donc quatre points du lieu sur u et la surface (g) est du quatrième ordre.

IV.

13. *Si l'on établit une correspondance* (1, 1) *entre les rayons* a *d'un faisceau et les génératrices* b *d'un même système d'un*

hyperboloïde V, *la perpendiculaire commune à deux droites homologues* a, b *engendre une surface du neuvième ordre.*

Soient μ le plan du faisceau, M son sommet, a un rayon quelconque, b la génératrice correspondante de l'hyperboloïde V, g la perpendiculaire commune à a et b, A et B ses pieds. Si l'on mène par M la parallèle b' à b, on obtient en M le cône directeur de V; nous le désignerons par *cône* M. Le plan ab' enveloppe un cône de la troisième classe (10). La perpendiculaire p à ce plan menée par M engendre donc un cône du troisième ordre G. Le plan $ap \equiv \alpha$ enveloppe un cône de la quatrième classe et le plan $b'p$, un cône de la cinquième classe (10). Par un raisonnement déjà employé (**4**), on prouve facilement que l'enveloppe du plan β, mené par b parallèlement au plan $b'p$, est de la cinquième classe.

La droite g est l'intersection de deux plans homologues α, β Ces plans rencontrant une droite quelconque u en des points liés par une correspondance (5, 4), on en déduit aisément que la surface (η) est du neuvième ordre.

L'ordre de la surface (g) peut encore être établi de la manière suivante. La droite u étant quelconque, menons deux parallèles à p, l'une, g_1, s'appuyant sur u et a, l'autre, g_2, s'appuyant sur u et b. Soient X_1, X_2 les points d'intersection de u avec g_1, g_2. Il existe quatre droites analogues à g_1 passant par X_1; car si par ce point on mène une parallèle à une génératrice quelconque du cône G, cette parallèle coupe μ en un point K qui se meut sur une cubique. Si a est le rayon du faisceau homologue de la génératrice de G considérée, les droites MK et a, liées par une correspondance (1, 3) coïncideront quatre fois.

Les droites analogues à g_2 passant par X_2 sont au nombre de cinq. En effet, menons par X_2 une parallèle p' à une génératrice de G et soit h la droite qui projette X_2 sur la génératrice b de V homologue de p'. Les droites h et p' étant des génératrices correspondantes de deux cônes A et G', respectivement du quatrième et du troisième ordre, le plan hp' paraît envelopper un cône de la septième classe; en réalité, le plan hp' per-

pendiculaire à une génératrice du cône asymptote de V enveloppe un cône supplémentaire de ce cône asymptote. Les cônes Λ et G′ ont donc cinq couples de génératrices coïncidentes (**10**) qui sont les droites g_2 passant par X_2.

Les neuf coïncidences X_1, X_2 sont les points de la surface situés sur u.

On pouvait encore prévoir l'ordre de la surface (g) en déterminant sa section par le plan du faisceau. Ce plan coupe le cône G suivant trois génératrices qui sont parallèles à trois droites de la surface situées dans μ. Appelons v la droite qui projette M sur b, et v' la perpendiculaire à v menée par M dans μ. La droite v décrivant un cône Λ du quatrième ordre, il est facile de s'assurer de ce que les droites v' et a coïncideront cinq fois. Car la connaissance de a entraîne celle de v et ensuite celle de v'; si l'on donne v', v est l'une des quatre droites d'intersection du cône Λ avec le plan mené par M perpendiculairement à v'. Il existe donc cinq droites g passant par M. Donc, *la section de la surface par le plan du faisceau se compose de trois droites et d'une sextique* (A) *ayant un point quintuple en* M.

Il est aisé de prouver que la courbe (B) est également du sixième ordre. A cet effet, nous déterminerons le nombre de ses points situés sur une génératrice c de V appartenant au second système. Appelons P et Q les points d'intersection de c avec b et le plan ag. On obtient un point du lieu sur c lorsque P et Q coïncident. Or, l'enveloppe du plan ag étant, comme on l'a vu, de la quatrième classe, les points P, Q liés par une correspondance (4, 1), coïncideront cinq fois. Un plan bc tangent à V contient donc six points de la courbe (B), dont cinq appartiennent à c et le sixième à b.

14. Supposons que le faisceau et V aient un *élément uni* $a_1 \equiv b_1$, c'est-à-dire qu'il existe une génératrice de l'hyperboloïde qui coïncide avec son homologue dans le faisceau. Dans ce cas, les notations restant les mêmes, l'enveloppe du plan ab' est de la seconde classe (**10**), et p engendre un cône quadratique.

L'enveloppe du plan $ap \equiv ag \equiv \alpha$ est de la troisième classe et celle des plans $b'p$ ou $bg \equiv \beta$, de la quatrième. Les plans homologues α, β rencontrent donc une droite quelconque u en des points X, Y liés par une correspondance (3, 4), qui offre six coïncidences si l'on exclut celle qui provient du plan α_1 avec lequel coïncident α et β lorsque a et b se confondent avec a_1. Donc la *surface* (g) *est du sixième ordre.*

Déterminons sa section par le plan du faisceau. Le cône engendré par p étant quadratique, il est coupé par le plan μ suivant deux génératrices qui donnent les directions de deux droites g situées dans μ.

Pour obtenir les droites g passant par M, on observera que le cône Λ de sommet M est actuellement du troisième ordre puisque M appartient à V. On en déduira facilement que la droite v', définie au paragraphe précédent, et le rayon a coïncideront quatre fois. Il ne passe donc plus que quatre droites g par M dont une dans le plan α_1 et la section de (g) par le plan μ se compose de deux droites et d'une quartique (A) ayant en M un point triple. Nous avons exclu la droite a_1 qui correspond au plan α_1.

La courbe (B) est du quatrième ordre. P et Q conservant leur signification, il est aisé de vérifier que ces points coïncident quatre fois : il suffit d'observer que le plan $a\mathrm{Q} \equiv ap$ enveloppe une développable de la troisième classe. La courbe (B) possède donc quatre de ses points dans le plan bc, si l'on exclut celui qui provient de la droite a_1.

15. *Si, à l'hyperboloïde* V, *on substitue un paraboloïde réglé* V', *la surface* (g) *est généralement du septième ordre.*

Les méthodes employées pour l'hyperboloïde s'adaptent au cas présent.

Menons par M la parallèle b' à b. Le plan ab' enveloppe un cône de second ordre. Par suite, la perpendiculaire p en M au plan ab' engendre également un cône quadratique G. Les plans ap et $b'p$ enveloppent des cônes de la troisième classe (10) ; mais

l'enveloppe du plan bg est de la quatrième classe, parce qu'elle touche le plan de l'infini qui correspond à la génératrice à l'infini de V'.

Cela posé, cherchons l'ordre de la surface (g) en déterminant le nombre des droites g qui s'appuient sur une droite donnée u. Soient X, Y les points où deux plans correspondants α, β coupent u. On vérifie, comme précédemment, que ces points sont liés par une correspondance (4, 3); il y a donc sept points de (g) sur u.

L'ordre de (g) peut aussi s'établir en menant deux parallèles g_1, g_2 à p, s'appuyant, la première sur a et u, la seconde sur b et u. Appelons, comme précédemment, X_1 et X_2 les points d'intersection de u avec g_1 et g_2. Il passe trois droites g_1 par X_1. Car si par ce point on mène une parallèle à une génératrice quelconque du cône G, elle coupe le plan μ du faisceau en un point K qui décrit une conique; de là on déduit que les droites a et MK coïncident trois fois.

Les droites g_2 passant par X_2 sont au nombre de quatre. La parallèle p' à p menée par X_2 et la perpendiculaire h à b engendrent respectivement des cônes du second et du troisième ordre; le plan hp' paraît envelopper un cône de la cinquième classe, alors qu'il décrit une feuillée dont l'axe est la perpendiculaire menée par X_2 au plan directeur de V'; les droites h, p ont donc quatre coïncidences qui sont les droites g_2 passant par X_2.

Les sept coïncidences X_1, X_2 déterminent sept points du lieu sur u.

On peut aussi déterminer la section de (g) par le plan μ. Le cône (p) étant quadratique, on en conclut qu'il existe deux droites g dans μ. Pour obtenir celles qui passent par M, on observera que le cône A est actuellement du troisième ordre (2); par suite les droites a et v' coïncident quatre fois et M appartient quatre fois à (g).

La section par le plan μ se compose donc de deux droites et d'une courbe (A) du cinquième ordre ayant un point quadruple au sommet du faisceau.

La courbe (B) est également du cinquième ordre. Car l'enveloppe du plan $ap \equiv ag$ étant de la troisième classe, les points P et Q, définis plus haut, sont liés par une correspondance (3, 1) : d'où quatre points de (B) sur b et cinq dans le plan bc.

Cas particuliers. — 1° Supposons que le faisceau et le paraboloïde aient un élément uni a_1. Le plan ab' engendre alors un faisceau et p décrit un plan. Les plans ap et $b'p$ enveloppent des développables de la seconde classe; l'enveloppe de α est donc de la seconde classe et celle de β de la troisième. On obtiendra, sur u, cinq points de la surface (g), et celle-ci est du cinquième ordre, ou plutôt du quatrième ordre si l'on écarte le plan α_1 vers lequel tendent les plans α et β lorsque a et b approchent indéfiniment de a_1.

Le lieu de p étant un plan, on n'obtient plus qu'une droite g dans le plan μ. Le cône A de sommet M étant du second ordre (2), on en déduit aisément qu'il passe par M trois droites g dont une est située dans le plan a_1. La section par le plan μ se compose actuellement d'une droite et d'une courbe du troisième ordre passant deux fois par M.

Les points P et Q liés par une correspondance (2, 1) coïncident trois fois sur c en des points de (B) ; cette courbe est donc aussi du quatrième ordre.

2° Si le plan μ du faisceau est le plan directeur de V', la surface g est un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à μ. Les plans ap et $b'p$ décrivent des faisceaux ayant pour axe p. Le plan $bg \equiv \beta$ enveloppe un cylindre circonscrit à V' et dont les génératrices sont parallèles à p. Il s'ensuit que les plans homologues α, β rencontrent une droite u en des points qui coïncideront trois fois : le cylindre est donc du troisième ordre.

La perpendiculaire menée par M au plan μ est une droite g double, car elle rencontre normalement deux génératrices de V'. La trace (A) du cylindre sur μ est donc une cubique ayant un point double en M.

Les plans ap et la droite b marquent sur une génératrice du second mode c deux ponctuelles projectives dont les points dou-

bles appartiennent à la courbe (B); cette dernière est donc une cubique gauche. Sa bisécante passant par M est la perpendiculaire au plan du faisceau.

Remarque. — Lorsque l'on considère le paraboloïde, la présence d'une génératrice à l'infini rend les recherches plus délicates. Il n'est pas sans intérêt de fixer le rôle exact de cette génératrice dans les questions qui nous occupent en déterminant sa parallèle menée par le sommet du faisceau et la génératrice du cône A qui lui est perpendiculaire. A cet effet, soient b une génératrice du paraboloïde parallèle au plan directeur π, c et d deux génératrices de l'autre système, C et D leurs points d'intersection avec b et C_1, D_1 ceux des mêmes droites avec π. Projetons, parallèlement à c, D en D′ sur π. La génératrice b est parallèle à la droite CD′. Si l'on suppose que D se transporte à l'infini, la parallèle menée par C à la génératrice correspondante est parallèle à la droite d'intersection D_1D' des deux plans directeurs du paraboloïde.

Soit E la projection sur b d'un point fixe O. OE est l'intersection du plan OCD avec un plan perpendiculaire à CD. Si la génératrice b se transporte à l'infini, le plan OCD devient parallèle au second plan directeur, tandis que le second plan devient perpendiculaire à l'intersection des deux plans directeurs.

V.

16. Étant donnés deux hyperboloïdes réglés V et V_1, supposons établie une relation de projectivité entre les génératrices du système a de V et celles du mode b de V_1.

La perpendiculaire commune à deux génératrices homologues a, b *décrit une surface du douzième ordre.*

Menons par un point quelconque S des parallèles a', b' aux génératrices homologues a, b, puis la perpendiculaire p au plan $a'b'$. L'enveloppe de ce plan est de la quatrième classe et p engendre un cône G du quatrième ordre : c'est le cône

directeur de la surface. Les plans $a'p$, $b'p$ enveloppent des cônes de la sixième classe. Semblablement, les plans α et β menés parallèlement à p par a et b enveloppent des développables de la sixième classe. D'après cela, les plans homologues α, β rencontrent une droite quelconque u en des points X, Y qui coïncident douze fois, ce qui établit l'ordre de la surface (g).

Les notations des paragraphes précédents étant conservées, il sera aisé de prouver que les points X_1, X_2 ont six coïncidences; en effet, le plan hp' perpendiculaire à une génératrice du cône asymptote de V enveloppe son cône supplémentaire, ce qui exige six coïncidences hp' et par suite six droites g_1 passant par X_1.

Les courbes (A) et (B) sont du huitième ordre; car a et le plan bg rencontrent une génératrice du second mode de V en des points satisfaisant à une correspondance (6, 1); on obtient donc sept points de la courbe (A) sur une génératrice du second système de V.

Cas particuliers. — 1° Si V et V_1 ont un élément uni a_1, l'enveloppe du plan $a'b'$ est de la troisième classe et p engendre un cône du troisième ordre. Les enveloppes des plans $a'p$, $b'p$ et par suite celles des plans α, β sont de la cinquième classe; mais les plans α et β coïncident lorsque a et b se confondent avec a_1, donc la surface (g) est actuellement du neuvième ordre.

On n'obtient plus que six points de la courbe (A) sur une génératrice du second système de V. Les courbes (A) et (B) sont donc du sixième ordre, si l'on exclut la droite a_1.

2° Si V et V_1 ont deux éléments unis, $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$, $a'b'$ enveloppe un cône de la seconde classe et p engendre un cône quadratique; les enveloppes des plans $a'p$, $b'p$ ou celles des plans α, β sont de la quatrième classe et (g) est du sixième ordre, si l'on fait abstraction des plans α_1, α_2 vers lesquels tendent les plans α et β, lorsque a et b se réunissent en a_1 ou en a_2.

On obtient cinq points de (A) sur une génératrice du second mode de V. Les courbes (A) et (B) sont donc du quatrième ordre, si l'on écarte les droites a_1 et a_2.

17. A l'hyperboloïde V_1, substituons un paraboloïde V_1'. L'enveloppe du plan $a'b'$ est de la troisième classe et p engendre un cône du troisième ordre. L'enveloppe des plans $a'p$ et $ag \equiv \alpha$ est de la cinquième classe; celle de $b'p$ est de la quatrième et celle de $bg \equiv \beta$, de la cinquième (**4**). La surface (g) est donc du dixième ordre.

Les courbes (A) ou (B) rencontrent une génératrice du second mode de V ou V_1' en six points : elles sont donc du septième ordre.

Cas particuliers. — 1° Si V et V_1' ont un élément uni, les enveloppes des plans homologues α, β sont de la quatrième classe et (g) est du septième ordre.

Les courbes (A) et (B) sont du cinquième ordre.

2° Si V et V_1' ont deux éléments unis, p décrit un plan et les enveloppes des plans correspondants α, β sont de la troisième classe et (g) est du quatrième ordre.

Les courbes (A) et (B) sont du troisième ordre.

Nous négligeons ici les plans vers lesquels tendent α et β lorsque a et b tendent à se confondre avec un élément uni.

18. Si a et b décrivent deux paraboloïdes V' et V_1', les enveloppes de α et β sont de la quatrième classe et (g) est du huitième ordre.

Les courbes (A) et (B) sont du sixième ordre.

Cas particuliers. — 1° Si V' et V_1' ont un élément uni, les enveloppes des plans α, β sont de la troisième classe et (g) est du sixième ordre.

Les courbes (A) et (B) sont du quatrième ordre.

2° Si V' et V'_1 ont le même plan directeur, la surface (g) est un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à ce plan. D'autre part, les plans α, β enveloppent des cylindres circonscrits à V' et V'_1. La surface (g) est du quatrième ordre.

Les courbes (A) et (B) sont du quatrième ordre.

19. Supposons les systèmes réglés projectifs superposés sur un même hyperboloïde V. Si par un point quelconque S on mène des parallèles a'. b' à a, b, le plan $a'b'$ enveloppe un cône quadratique. En effet, les droites a', b' engendrent le cône directeur de V ayant pour sommet le point S. Comme toute génératrice a de V a deux homologues suivant qu'on la range dans l'un ou l'autre système, il passe par a' deux plans $a'b'$.

La perpendiculaire p menée par S au plan $a'b'$ engendre donc un cône du second ordre.

On détermine l'ordre de la surface (g) en cherchant le nombre de ses points situés sur une génératrice quelconque a de V. Les perpendiculaires communes à la droite a et aux deux génératrices qui lui correspondent sur V, donnent d'abord deux points du lieu.

On obtiendra les autres en cherchant les génératrices du second mode de V qui sont des droites g. Une droite g appartient à V lorsque la droite p qui lui correspond est parallèle à une génératrice de V ; car cette droite g rencontrant V en trois points en fera entièrement partie. Or a' et p engendrent des cônes quadratiques qui ont quatre génératrices communes : les droites g parallèles à ces droites sont des génératrices du second mode de V.

La surface (g) est donc *du sixième ordre*, car elle est rencontrée en six points par une génératrice quelconque de V.

Supposons maintenant que les systèmes $[a]$, $[b]$ soient *en involution*. Une droite a' n'ayant plus qu'une seule homologue b', le plan $a'b'$ engendre une feuillée et la droite p décrit un faisceau. Le plan de ce faisceau coupe le cône directeur de V suivant deux droites qui donnent les directions de deux généra-

trices du second mode de V qui sont des droites g. A une droite a il ne correspond plus qu'une perpendiculaire commune. Une génératrice quelconque a de V rencontrant la surface (g) en trois points, cette surface est du *troisième ordre*.

20. Supposons les systèmes réglés projectifs superposés sur un même paraboloïde V'. Les droites a', b' engendrent le plan directeur de V' et p est perpendiculaire à ce plan. La surface (g) est donc un cylindre. Sur chaque génératrice a de V' on obtient encore deux points du lieu qui sont les pieds des perpendiculaires communes correspondant à a. Comme il n'existe aucune droite g parmi les génératrices de V', la surface g est *un cylindre du second ordre*.

On peut traiter ce cas de la manière suivante : les génératrices homologues a, b marquent sur une génératrice u du second système deux ponctuelles projectives [M], [N]. Si l'on projette toutes les génératrices du premier système orthogonalement sur un plan λ parallèle au premier plan directeur, les projections enveloppent une parabole. Les projections a', b' de a, b se correspondent dans une homographie entre les tangentes à cette parabole; leur point d'intersection P décrit une conique, car sur a' on trouve deux points qui correspondent à a considérée comme appartenant à la première ou à la seconde série. La perpendiculaire en P à λ est une droite g; la surface (g) est donc un cylindre du second ordre.

Soient I et J les points de fuite des ponctuelles projectives [M], [N], i et j les génératrices correspondantes du paraboloïde. Le cylindre est hyperbolique et ses plans asymptotes sont parallèles aux plans menés par i et j perpendiculairement à λ. Si les ponctuelles [M], [N] sont semblables, le cylindre est parabolique.

Les ponctuelles [M], [N] ont deux points doubles D, E; soient d, e les génératrices de V' passant par D, E, et d', e' leurs projections sur λ. Les plans menés par ces droites perpendiculairement à λ touchent le cylindre.

Si l'on suppose les systèmes $[a]$ et $[b]$ ***en involution***, une droite a de V' n'a plus qu'un seule homologue. Une droite a de V' ne rencontre la surface (g) qu'en un point : le lieu de g est donc ***un plan***.

Il me reste à remercier M. J. Neuberg, qui m'a guidé dans ce travail et a souvent simplifié mes démonstrations.

SUR

QUELQUES SURFACES RÉGLÉES

PAR

J. NEUBERG

Professeur a l'Université de Liége.

SUR

QUELQUES SURFACES RÉGLÉES

M. Degueldre, professeur à l'Athénée de Tournai, a étudié synthétiquement des surfaces engendrées par la perpendiculaire commune à deux droites a et b, la première fixe et la seconde variable ou toutes deux variables. Il m'a paru intéressant de chercher les équations des surfaces et des courbes dont s'est occupé ce géomètre.

Je désignerai par g la perpendiculaire commune, par A et B ses pieds sur a et b, et j'appellerai *surface* (g), *courbe* (A), *courbe* (B) les lieux géométriques de g, A, B.

Les axes étant rectangulaires, un plan sera représenté en coordonnées cartésiennes homogènes x, y, z, t par une équation telle que

$$P_r \equiv A_r x + B_r y + C_r z + D_r t = 0, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots,$$

et une droite par un système de deux équations $P_r = 0$, $P_s = 0$; les paramètres directeurs de cette droite sont les déterminants deduits de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} A_r & B_r & C_r \\ A_s & B_s & C_s \end{matrix} \right\|.$$

Pour abréger, nous posons

$$B_rC_s - B_sC_r = \alpha_{rs}, \quad C_rA_s - C_sA_r = \beta_{rs}, \quad A_rB_s - A_sB_r = \gamma_{rs};$$

ces quantités sont nulles si les plans P_r, P_s sont parallèles.

Soient

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = 0, \\ P_2 = 0; \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} P_3 = 0, \\ P_4 = 0, \end{array} \right.$$

les équations des droites a et b. Les paramètres directeurs de la perpendiculaire commune g sont les mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_{12} & \beta_{12} & \gamma_{12} \\ \alpha_{34} & \beta_{34} & \gamma_{34} \end{array} \right\|;$$

nous les représentons par λ, μ, ν. Ils sont égaux à zéro, si a et b sont parallèles.

La droite g est l'intersection des plans α, β menés parallèlement à la direction (λ, μ, ν) l'un par a, l'autre par b; donc ses équations sont

$$H_2P_1 - H_1P_2 = 0, \qquad H_4P_3 - H_3P_4 = 0, \tag{L}$$

où

$$H_r \equiv A_r\lambda + B_r\mu + C_r\nu = \left| \begin{array}{ccc} A_r & B_r & C_r \\ \alpha_{12} & \beta_{12} & \gamma_{12} \\ \alpha_{34} & \beta_{34} & \gamma_{34} \end{array} \right|.$$

I

a *est fixe*, b *est un rayon variable d'un faisceau.*

1. Soient

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \tag{1}$$

$$P_3 + \rho P_4 = 0, \qquad P_5 = 0 \tag{2}$$

les équations des droites a et b ; ρ est un paramètre variable.

Les paramètres directeurs de b étant

$$\alpha_{35} + \rho\alpha_{45}, \qquad \beta_{35} + \rho\beta_{45}, \qquad \gamma_{35} + \rho\gamma_{45},$$

ceux de g sont de la forme

$$\lambda = l + l_1\rho, \quad \mu = m + m_1\rho, \quad \nu = n + n_1\rho,$$

où $\quad l = \beta_{12}\gamma_{34} - \beta_{34}\gamma_{12}, \qquad l_1 = \beta_{12}\gamma_{45} - \beta_{45}\gamma_{12}$, etc.

Les équations de g se déduisent de (L) en remplaçant P_3, P_4 par $P_3 + \rho P_4$, P_5, et H_3, H_4 par $H_3 + \rho H_4$, H_5; on obtient ainsi

$$H_2P_1 - H_1P_2 = 0,$$
$$H_5(P_3 + \rho P_4) - (H_3 + \rho H_4)P_5 = 0.$$

Les quantités H étant du premier degré en ρ, ces équations sont de la forme

$$E + E_1\rho = 0, \qquad F + F_1\rho + F_2\rho^2 = 0;$$

E, E_1, F, F_1, F_2 désignent des fonctions linéaires de x, y, z, t.

L'élimination de ρ conduit à l'équation de la surface (g)

$$FE_1^2 + F_2E^2 - EE_1F_1 = 0.$$

Cette surface est donc un conoïde cubique.

La courbe (B) est la conique représentée par le système d'équations

$$E + E_1\rho = 0, \qquad P_3 + \rho P_4 = 0, \qquad P_5 = 0,$$

ou par

$$EP_4 - E_1P_3 = 0, \qquad P_5 = 0.$$

II

a *est fixe*, b *est un rayon variable d'un système réglé.*

2. Soient

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad (1)$$
$$P_3 + \rho P_4 = 0, \qquad P_5 + \rho P_6 = 0 \qquad (2)$$

les équations de a et b. Le système réglé $[b]$ est d'abord supposé appartenir à un hyperboloïde V.

Les paramètres directeurs de b sont les mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} A_3 + \rho A_4 & B_3 + \rho B_4 & C_3 + \rho C_4 \\ A_5 + \rho A_6 & B_5 + \rho B_6 & C_5 + \rho C_6 \end{matrix} \right\|,$$

ou

$$\alpha_{35} + (\alpha_{36} + \alpha_{45})\rho + \alpha_{46}\rho^2, \qquad \beta_{35} + (\beta_{36} + \beta_{45})\rho + \beta_{46}\rho^2, \text{ etc.};$$

par suite, les quantités λ, μ, ν, H sont des fonctions du second degré de ρ.

Les équations de g sont

$$\left.\begin{aligned} H_2P_1 - H_1P_2 &= 0, \\ (H_5 + \rho H_6)(P_3 + \rho P_4) - (H_3 + \rho H_4)(P_5 + \rho P_6) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ordonnons-les par rapport à ρ; il vient

$$E + E_1\rho + E_2\rho^2 = 0, \qquad (4)$$

$$F + F_1\rho + F_2\rho^2 + F_3\rho^3 + F_4\rho^4 = 0. \qquad (5)$$

En éliminant ρ par la méthode dialytique, on obtient

$$\left| \begin{matrix} E & E_1 & E_2 & & & \\ & E & E_1 & E_2 & & \\ & & E & E_1 & E_2 & \\ & & & E & E_1 & E_2 \\ F & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & \\ & F & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{matrix} \right| = 0; \qquad (6)$$

les éléments non écrits de ce déterminant sont des zéros.

La surface g est donc un conoïde du sixième ordre.

Le point B satisfait aux équations

$$E + E_1\rho + E_2\rho^2 = 0, \quad P_3 + \rho P_4 = 0, \quad P_5 + \rho P_6 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{x}{\varphi(\rho)} = \frac{y}{\varphi_1(\rho)} = \frac{z}{\varphi_2(\rho)} = \frac{t}{\varphi_3(\rho)},$$

les fonctions φ, φ_1, φ_2, φ_3 étant du quatrième degré en ρ. Par conséquent, la courbe (B) est une unicursale du quatrième ordre (biquadratique gauche de seconde espèce).

Pour abréger, nous disons que φ, φ_1, φ_2, φ_3 sont les coordonnées homogènes d'un point de cette courbe.

3. Tout plan α passant par a contient deux droites g; car l'égalité qui exprime que le plan (4) passe par un point M extérieur à a, détermine deux valeurs de ρ, telles que chacune des droites correspondantes b et la droite a ont une perpendiculaire commune située dans le plan aM. Cependant il existe deux plans passant par a qui contiennent deux droites g coïncidentes; ils sont représentés par l'équation $E_1^2 - 4EE_2 = 0$.

L'équation qui exprime que le plan (5) passe par un point donné M, détermine quatre valeurs de ρ; on en conclut qu'il passe quatre droites g par M. En particulier, par un point quelconque de a on peut mener quatre droites g; celles-ci sont situées dans un même plan normal à a.

L'enveloppe des plans bg est une développable de la quatrième classe et du sixième ordre. En effet, on vient de voir qu'il passe quatre plans β par un point quelconque, et l'équation de l'enveloppe du plan β s'obtient en égalant à zéro le discriminant de l'équation (5).

4. Si la droite a est parallèle à une génératrice b_1 de V, par exemple à celle qui correspond à $\rho = 0$, on peut représenter a et b par les systèmes d'équations

$$P_3 = 0, \qquad P_5 + pt = 0, \tag{7}$$

$$P_3 + \rho P_4 = 0, \qquad P_5 + \rho P_6 = 0, \tag{8}$$

p étant une constante. Alors

$$\lambda = \beta_{35}[\gamma_{35} + (\gamma_{36} + \gamma_{45})\rho + \gamma_{46}\rho^2] - \gamma_{35}[\beta_{35} + (\beta_{36} + \beta_{45})\rho + \beta_{46}\rho^2], \text{ etc ;}$$

après suppression du facteur commun ρ on aura pour λ, μ, ν et pour les quantités H des expressions du premier degré en ρ. Les équations de g sont

$$H_5P_5 - H_5(P_5 + pl) = 0, \tag{9}$$

$$(H_5 + \rho H_6)(P_3 + \rho P_4) - (H_3 + \rho H_4)(P_5 + \rho P_6) = 0; \tag{10}$$

elles sont de la forme

$$E + E_1\rho = 0,$$

$$F + F_1\rho + F_2\rho^2 + F_3\rho^3 = 0.$$

La surface (g) a donc pour équation

$$E_1^3F - E_1^2EF_1 + E_1E^2F_2 - E^3F_3 = 0;$$

c'est un conoïde du quatrième ordre.

Le point B, qui satisfait aux équations

$$E + E_1\rho = 0, \qquad P_3 + \rho P_4 = 0, \qquad P_5 + \rho P_6 = 0,$$

décrit une cubique gauche.

Remarques. — I. Si la génératrice b_1 parallèle à a, correspond à une valeur quelconque $\rho = \rho_1$ et que l'on représente encore a par les équations $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, les valeurs générales de λ, μ, ν (**2**) s'annulent pour $\rho = \rho_1$. Par suite, les quantités H qui entrent dans les équations (3) ont le facteur commun $\rho - \rho_1$, et les équations de g, après suppression de ce facteur, sont respectivement du premier et du troisième degré en ρ.

II. Le plan ab_1 peut être considéré comme un lieu de droites g; il échappe à l'analyse précédente, parce que la direction de la perpendiculaire commune à a et b_1 est indéterminée.

Si l'on fait tendre une génératrice b de V vers la position b_1, les plans ag et bg tendent vers des positions qui ont pour équations $E = 0$, $F = 0$, c'est-à-dire

$$H'_5P_3 - H'_3(P'_5 + pt) = 0, \qquad H'_5P_5 - H'_5P_5 = 0,$$

où H'_3, H'_5 désignent les valeurs de H_3, H_5 pour la valeur $\rho = 0$ que nous faisons de nouveau correspondre à b_1. Donc la droite g se transporte à l'infini, et sa direction tend vers une limite ayant pour paramètres directeurs

$$\beta_{35}(\gamma_{35} + \gamma_{45}) - \gamma_{35}(\beta_{36} + \beta_{45}) + (\beta_{35}\gamma_{46} - \gamma_{35}\beta_{46})\rho, \text{ etc.}$$

5 Si la droite a coïncide avec la génératrice $P_3 = P_5 = 0$ de V et que l'on désigne pour abréger le binôme $H_rP_s - H_sP_r$ par h_{rs}, les équations (9) et (10) de g deviennent

$$h_{35} = 0, \qquad h_{35} + (h_{63} + h_{54})\rho + h_{64}\rho^2 = 0,$$

ou simplement

$$h_{35} = 0, \qquad h_{63} + h_{54} + h_{64}\rho = 0.$$

Comme elles sont respectivement du premier et du second degré en ρ, la surface (g) est un conoïde cubique. Nous avons fait abstraction du plan $h_{35} = 0$, vers lequel tendent les plans ag et bg lorsque b tend vers b_1.

Le lieu de B, défini par le système d'équations

$$H_5P_3 - H_3P_5 = 0, \qquad P_3 + \rho P_4 = 0, \qquad P_5 + \rho P_6 = 0,$$

est du troisième ordre. Mais la droite a en fait partie, car les équations précédentes admettent la solution $\rho = 0$, $P_3 = 0$, $P_5 = 0$; cette circonstance a déjà été expliquée ci-dessus. D'ailleurs, l'équation $h_{35} = 0$ étant de la forme

$$(k_5 + \rho k'_5)P_3 - (k_3 + \rho k'_3)P_5 = 0,$$

si l'on y ajoute les équations $P_3 + \rho P_4 = 0$, $P_5 + \rho P_6 = 0$ multipliées respectivement par $- k_5$, k_3, on obtient l'équation d'un plan. Donc le lieu de B se compose de a et d'une conique.

6 Remplaçons l'hyperboloïde V par un paraboloïde V'. Les droites a et b peuvent alors être représentées par les systèmes

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0,$$
$$P_3 + \rho P_4 = 0, \qquad P_5 + \rho t = 0.$$

Les paramètres directeurs de b étant

$$\alpha_{35} + \rho\alpha_{45}, \qquad \beta_{35} + \rho\beta_{45}, \qquad \gamma_{35} + \rho\gamma_{45},$$

ceux de g et par suite les quantités H sont des fonctions du premier degré de ρ.

Les équations de g sont

$$H_2P_1 - H_1P_2 = 0,$$
$$H_5(P_3 + \rho P_4) - (H_3 + \rho H_4)(P_5 + \rho t) = 0,$$

ou

$$h_{21} = 0, \qquad h_{33} + (h_{34} - H_5 t)\rho - H_4\rho^2 = 0;$$

comme elles se ramènent à

$$E + E_1\rho = 0,$$
$$F + F_1\rho + F_2\rho^2 + F_3\rho^3 = 0,$$

la surface (g) est du quatrième ordre.

Le point B satisfait aux équations

$$E + E_1\rho = 0, \qquad P_3 + \rho P_4 = 0, \qquad P_5 + \rho t = 0;$$

donc il décrit une cubique gauche.

Si a est parallèle à la génératrice $P_3 = P_5 = 0$ de V', on peut représenter a et b par les équations

$$P_3 = 0, \qquad P_5 + pt = 0,$$
$$P_3 + \rho P_4 = 0, \qquad P_5 + \rho t = 0.$$

On a maintenant

$$\lambda = \beta_{35}(\gamma_{35} + \rho\gamma_{45}) - \gamma_{35}(\beta_{35} + \rho\beta_{45}), \text{ etc.};$$

on conclut de là, en supprimant le facteur commun ρ, que λ, μ, ν sont des constantes, ce qui d'ailleurs est évident, g étant constamment perpendiculaire au plan directeur de V'.

Les équations de g sont

$$H_5(P_3 + \rho P_4) - (H_3 + \rho H_4)(P_5 + \rho t) = 0,$$
$$H_5 P_3 - H_3(P_5 + pt) = 0;$$

la première, indépendante de ρ, représente un plan α mené par a et perpendiculaire au plan directeur. Le lieu proprement dit de g est le plan α; on a fait abstraction du plan mené par a et par la génératrice $P_3 = P_5 = 0$ de V'. Le point B décrit l'intersection de α et V'.

Lorsque a coïncide avec la génératrice $P_3 = P_5 = 0$, le point B parcourt la génératrice du second système de V' contenue dans le plan α.

Remarque. — Pour exprimer que la droite

$$P_3 + \rho P_4 = 0, \qquad P_5 + \rho P_6 = 0 \tag{11}$$

engendre un paraboloïde, remarquons que pour une certaine valeur $\rho = \rho_1$ les plans (11) sont parallèles. Par suite les paramètres directeurs de cette droite doivent s'annuler pour $\rho = \rho_1$; les expressions générales de ces paramètres et par suite aussi celles de λ, μ, ν sont divisibles par $\rho - \rho_1$. Il en résulte que

les équations (4) et (5) de g sont divisibles par $\rho - \rho_1$ et après simplifications ne sont plus que du premier et du troisième degré en ρ.

III

a *et* b *sont des rayons homologues de deux faisceaux projectifs.*

7. Soient

$$P_1 + \rho P_2 = 0, \qquad P_3 = 0,$$
$$P_4 + \rho P_5 = 0, \qquad P_6 = 0,$$

les équations de a et b, M et N les centres des faisceaux.

Les paramètres directeurs de ces droites étant $\alpha_{13} + \rho\alpha_{23} \dots$ et $\alpha_{46} + \rho\alpha_{56}, \dots$, ceux de g et par suite les quantités H sont des fonctions du second degré de ρ.

Les équations de g sont

$$H_3(P_1 + \rho P_2) - (H_1 + \rho H_2)P_3 = 0,$$
$$H_6(P_4 + \rho P_5) - (H_4 + \rho H_5)P_6 = 0;$$

elles sont de la forme

$$E + E_1\rho + E_2\rho^2 + E_3\rho^3 = 0,$$
$$F + F_1\rho + F_2\rho^2 + F_3\rho^3 = 0.$$

L'élimination de ρ donne l'équation de la surface (g) :

$$\begin{vmatrix} E & E_1 & E_2 & E_3 & & \\ & E & E_1 & E_2 & E_3 & \\ & & E & E_1 & E_2 & E_3 \\ F & F_1 & F_2 & F_3 & & \\ & F & F_1 & F_2 & F_3 & \\ & & F & F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0;$$

cette surface est donc du sixième ordre.

La courbe (A) est définie par le système d'équations

$$F + F_1\rho + F_2\rho^2 + F_3\rho^3 = 0,$$
$$P_1 + \rho P_2 = 0, \qquad P_3 = 0;$$

on conclut de là que les coordonnées x, y, z, t sont proportionnelles à des polynômes du quatrième degré en ρ. Le lieu de A est donc une quartique unicursale; l'intersection complète de la surface (g) avec le plan du faisceau $[a]$ se compose de cette quartique et de deux génératrices de la surface.

8. Considérons le cas où les droites menées par M et N parallèlement à l'intersection des plans des faisceaux $[a]$, $[b]$ sont des rayons homologues. Le plan de ces rayons est un élément double des deux faisceaux formés par les plans qui projettent les faisceaux $[a]$. $[b]$ à partir de la droite MN; soient $P_3 + P_4 + p = 0$ son équation et $P_2 = 0$ celle du second élément double des deux faisceaux de plans. Les équations de a et b seront

$$P_3 + P_4 + p + \rho P_2 = 0, \qquad P_3 = 0,$$
$$P_3 + P_4 + p + q\rho P_2 = 0, \qquad P_4 = 0,$$

ou simplement

$$P_4 + p + \rho P_2 = 0, \qquad P_3 = 0, \qquad (1)$$
$$P_3 + p + q\rho P_2 = 0, \qquad P_4 = 0,$$

q étant une constante.

Les paramètres directeurs de ces droites ayant les valeurs

$$\alpha_{43} + \rho\alpha_{23}, \ldots \qquad \text{et} \qquad \alpha_{34} + \rho\alpha_{24}, \ldots$$

ceux de g sont de la forme

$$l_1\rho + l_2\rho^2, \qquad m_1\rho + m_2\rho^2, \qquad n_1\rho + n_2\rho^2,$$

nous prendrons

$$\lambda = l_1 + l_2\rho, \qquad \mu = m_1 + m_2\rho, \qquad \nu = n_1 + n_2\rho.$$

Les équations de g sont

$$H_3(P_4 + p + \rho P_2) - (H_4 + \rho H_2)P_3 = 0, \tag{2}$$

$$H_4(P_3 + p + q\rho P_2) - (H_3 + q\rho H_2)P_4 = 0. \tag{3}$$

Comme elles sont du second ordre en ρ, la surface (g) est du quatrième ordre. On a fait abstraction des perpendiculaires communes situées dans le plan des deux rayons homologues parallèles.

Le point A est déterminé par les équations (1) et (3); il décrit une cubique.

IV

a *et* b *sont des éléments homologues d'un faisceau de rayons et d'un système réglé qui sont projectifs.*

9. Soient

$$P_1 + \rho P_2 = 0, \qquad P_3 = 0, \tag{1}$$

$$P_4 + \rho P_5 = 0, \qquad P_6 + \rho P_7 = 0 \tag{2}$$

les équations de a et b; le système réglé est d'abord supposé appartenir à un hyperboloïde V.

Les paramètres directeurs de a et b étant

$$\alpha_{13} + \rho\alpha_{23}, \qquad \beta_{13} + \rho\beta_{23}, \qquad \gamma_{13} + \rho\gamma_{23},$$

$$\alpha_{46} + (\alpha_{47} + \alpha_{65})\rho + \alpha_{57}\rho^2, \text{ etc.},$$

ceux de g et par suite les quantités H sont des fonctions du troisième degré de ρ.

Les équations de g sont

$$H_3(P_1 + \rho P_2) - (H_1 + \rho H_2)P_3 = 0, \qquad (3)$$

$$(H_6 + \rho H_7)(P_4 + \rho P_5) - (H_4 + \rho H_5)(P_6 + \rho P_7) = 0, \qquad (4)$$

qui sont respectivement du quatrième et du cinquième degré en ρ; il en résulte que la surface (g) est du neuvième ordre.

Le point A est déterminé par les équations (1) et (4), d'où l'on déduit pour x, y, z, t des expressions du sixième degré en ρ; il décrit donc une sextique unicursale.

On verrait de même que la courbe (B) est une unicursale du sixième ordre.

10. Si les formes $[a]$, $[b]$ ont un élément uni, $a_1 \equiv b_1$, qui correspond à $\rho = 0$, représentons deux éléments homologues quelconques par

$$P_1 + \rho P_2 = 0, \qquad P_4 + P_6 = 0, \qquad (5)$$

$$P_4 + \rho P_5 = 0, \qquad P_6 + \rho P_7 = 0. \qquad (6)$$

Leurs paramètres directeurs étant

$$\alpha_{46} + (\alpha_{24} + \alpha_{26})\rho, \text{ etc.},$$

$$\alpha_{46} + (\alpha_{47} + \alpha_{56})\rho + \alpha_{57}\rho_2, \text{ etc.},$$

on trouve pour λ, μ, ν des valeurs qui, divisées par le facteur commun ρ, sont du second degré en ρ.

Les équations de g sont

$$(H_4 + H_6)(P_4 + \rho P_2) - (H_4 + \rho H_2)(P_4 + P_6) = 0, \qquad (7)$$

$$(H_6 + \rho H_7)(P_4 + \rho P_5) - (H_4 + \rho H_5)(P_6 + \rho P_7) = 0; \qquad (8)$$

on peut les écrire ainsi

$$h_{64} + (h_{41} + h_{62})\rho = 0, \qquad (9)$$

$$h_{61} + (h_{74} + h_{65})\rho + h_{75}\rho^2 = 0, \qquad (10)$$

et remplacer la seconde par

$$h_{74} + h_{63} - h_{42} - h_{62} + h_{75}\rho = 0, \qquad (11)$$

Les équations (9) et (11) étant du troisième degré en ρ, la surface (g) est du sixième ordre. Cependant les équations (9) et (10) admettent la solution $\rho = 0$, $H'_6P_4 - H'_4P_6 = 0$, H'_4 et H'_6 désignant les valeurs de H_4 et H_6 pour $\rho = 0$; il en résulte que le plan $H'_6P_4 - H'_4P_6 = 0$ peut être considéré comme faisant partie du lieu de la droite g. Ce plan est la limite commune des plans ag, bg lorsque a et b tendent vers a_1.

Le point A satisfait aux équations (5) et (9); on en conclut que la courbe (A) est du quatrième ordre. On peut y joindre la droite a.

Le point B vérifie les équations (6) et (9), ce qui semble indiquer un lieu du cinquième ordre. Mais à cause de la solution $\rho = 0$, $P_4 = P_6 = 0$, la droite a_1 fait partie du lieu. Pour écarter a_1, il suffit d'observer que

$$h_{64} \equiv H_6P_4 - H_4P_6 = (-H_6P_5 + H_4P_7)\rho,$$

ce qui ramène l'équation (9) au second degré en ρ. La courbe (B) est donc une quartique.

11. Considérons le cas où le système $[b]$ appartient à un paraboloïde V'. Soient alors

$$P_1 + \rho P_2 = 0, \qquad P_3 = 0;$$
$$P_4 + \rho P_5 = 0, \qquad P_6 + \rho t = 0$$

les équations de a et b. Les paramètres directeurs de ces droites étant du premier degré en ρ, ceux de g et les quantités H sont du second degré.

Les équations de g sont

$$H_3(P_1 + \rho P_2) - (H_1 + \rho H_2)P_3 = 0,$$
$$H_6(P_4 + \rho P_5) - (H_4 + \rho H_5)(P_6 + \rho t) = 0;$$

comme elles sont respectivement du troisième et du quatrième degré en ρ, la surface (g) est du septième ordre. Les courbes (A) et (B) sont des quintiques unicursales.

Si le faisceau $[a]$ et le système réglé $[b]$ ont un élément uni, $a_1 \equiv b_1$, qui correspond à $\rho = 0$, on a

$$\alpha_{13} : \alpha_{46} = \beta_{13} : \beta_{46} = \gamma_{13} : \gamma_{46},$$

et les valeurs de λ, μ, ν après suppression du facteur commun ρ, ne sont plus que du premier degré en ρ. En supposant

$$P_1 \equiv pP_4 + qP_6, \qquad P_3 \equiv p'P_4 + q'P_6,$$

on a pour les équations de g

$$(p'H_4 + q'H_6)(pP_4 + qP_6 + \rho P_2) - (pH_4 + qH_6 + \rho H_2)(pP_4 + qP_6) = 0,$$

$$H_6(P_4 + \rho P_5) - (H_4 + \rho H_5)(P_6 + \rho t) = 0,$$

ou

$$(p'q - pq')h_{46} + (p'h_{42} + q'h_{62})\rho = 0, \qquad (12)$$

$$h_{64} + (h_{65} - H_4 t)\rho - H_5 t\rho^2 = 0. \qquad (13)$$

En additionnant ces équations après avoir multiplié la seconde par $p'q - pq'$, on obtient

$$p'h_{42} + q'h_{62} + (p'q - pq')(h_{65} - H_4 t) - H_5 t\rho = 0. \qquad (14)$$

Les équations (12) et (14) étant du second degré en ρ, la surface (g) est du quatrième ordre. Les courbes (A) et (B) sont des quartiques.

12. Si le plan du faisceau $[a]$ est le plan directeur de V', les droites (g) sont perpendiculaires à ce plan. Représentons alors les droites a et b par les systèmes d'équations

$$P_1 + \rho P_2 = 0, \qquad P_3 = 0,$$

$$P_4 + \rho P_5 = 0, \qquad P_5 + \rho t = 0,$$

en supposant les plans P_1 et P_2 perpendiculaires au plan P_3.

L'équation du plan ag est maintenant $P_1 + \rho P_2 = 0$, et celle du plan bg est

$$P_4 + \rho P_5 + e(P_5 + \rho t) = 0,$$

sous la condition

$$\Sigma A_3 (A_4 + \rho A_5 + e A_3) = 0;$$

e est donc de la forme $f + g\rho$.

Les équations des plans ag et bg contenant le paramètre ρ respectivement au premier et au second degré, la surface (g) est un cylindre du troisième ordre. On voit aussi que les courbes (A) et (B) sont du troisième ordre.

Cependant, il existe deux génératrices b_1, b_2 de V′ qui sont parallèles aux rayons correspondants a_1, a_2 du faisceau $[a]$. Les plans $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ font également partie du lieu des droites g, et on peut joindre aux cubiques (A), (B) respectivement les couples $a_1 a_2$, $b_1 b_2$

V

a *et* b *sont des éléments homologues de deux systèmes réglés projectifs.*

13. Considérons d'abord le cas de deux hyperboloïdes V, V_1. Les droites a, b étant représentées respectivement par

$$P_1 + \rho P_2 = 0, \qquad P_3 + \rho P_4 = 0; \tag{1}$$

$$P_5 + \rho P_6 = 0, \qquad P_7 + \rho P_8 = 0, \tag{2}$$

leurs paramètres directeurs sont

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{13} + (\alpha_{14} + \alpha_{23})\rho + \alpha_{24}\rho^2, \text{ etc.}, \\ &\alpha_{57} + (\alpha_{56} + \alpha_{67})\rho + \alpha_{68}\rho^2, \text{ etc.}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

par suite, ceux de la perpendiculaire commune g et les quantités H sont du quatrième degré en ρ.

Les équations de g sont

$$(H_3 + \rho H_4)(P_1 + \rho P_2) - (H_1 + \rho H_2)(P_3 + \rho P_4) = 0, \qquad (4)$$
$$(H_7 + \rho H_8)(P_5 + \rho P_6) - (H_5 + \rho H_6)(P_7 + \rho P_8) = 0. \qquad (5)$$

Comme elles sont du sixième degré en ρ, les plans ag, bg enveloppent des développables de la sixième classe, et la surface (g) est du douzième ordre.

La courbe (A) est définie par les équations (1) et (5), qui donnent pour x, y, z, t des expressions du huitième degré en ρ; les courbes (A) et (B) sont donc des unicursales du huitième ordre.

14. Si les systèmes $[a]$, $[b]$ ont un élément uni, $a' \equiv b'$, qui correspond à $\rho = 0$, nous supposons

$$P_1 \equiv pP_5 + qP_7, \qquad P_3 \equiv p'P_5 + q'P_7. \qquad (6)$$

Comme on a

$$\alpha_{13} : \alpha_{57} = \beta_{13} : \beta_{57} = \gamma_{13} : \gamma_{57},$$

les valeurs de λ, μ, ν déduites des quantités (3) sont, après suppression du facteur commun ρ, du troisième degré en ρ, et tel est aussi le degré des quantités H.

Remplaçons, dans les équations (4) et (5), P_1 et P_3 par les valeurs (6) et, par conséquent, H_1 et H_3 par $pH_5 + qH_7$ et $p'H_5 + q'H_7$; nous aurons ainsi pour les équations de g :

$$(p'q - pq')h_{57} + (p'h_{52} + q'h_{72} + ph_{45} + qh_{47})\rho + h_{42}\rho^2 = 0, \qquad (7)$$
$$h_{75} + (h_{76} + h_{85})\rho + h_{86}\rho^2 = 0. \qquad (8)$$

Ces équations étant du cinquième degré en ρ, la surface (g) paraît être du dixième ordre. Mais la solution $\rho = 0$, $h_{57} = 0$ se rapporte au plan vers lequel tendent les plans ag et bg lorsque

a et b tendent à se confondre avec a'. Pour écarter ce plan, ajoutons les deux équations (7) et (8) après avoir multiplié la dernière par $p'q - pq'$; le résultat divisé par ρ prend la forme

$$F + F_1\rho + F_2\rho^2 + F_3\rho^3 + F_4\rho^4 = 0. \qquad (9)$$

L'élimination de ρ entre les équations (8) et (9) conduit à une équation du neuvième degré en x, y, z, t pour la surface (g).

Le point B est déterminé par les équations (2) et (9); il décrit par conséquent une sextique unicursale. Il en est de même du point A.

15. Si les systèmes réglés $[a]$ et $[b]$ ont un second élément uni, $a'' \equiv b''$, qui correspond à $\rho = \infty$, on peut poser

$$P_6 \equiv rP_2 + sP_4, \qquad P_8 \equiv r'P_2 + s'P_4, \qquad (10)$$

$$\alpha_{24} : \alpha_{68} = \beta_{24} : \beta_{68} = \gamma_{24} : \gamma_{68};$$

les valeurs de λ, μ, ν ne sont plus que du second degré en ρ.

Les valeurs (10) de P_6 et P_8 ramènent l'équation (5) à

$$h_{75} + (rh_{72} + sh_{74} + r'h_{25} + s'h_{45})\rho + (r's - rs')h_{24}\rho^2 = 0. \qquad (11)$$

La droite g est représentée par les équations (7) et (11), qui admettent les deux solutions $\rho = 0$, $h_{75} = 0$ et $\rho = \infty$, $h_{24} = 0$; ces solutions se rapportent aux limites des plans ag, bg, lorsque a et b tendent à se confondre avec a' ou avec a''. En éliminant h_{75} et h_{24} entre les équations (7) et (11), on obtient pour g deux équations du troisième degré en ρ, que nous présentons par

$$D + fh_{13}\rho = 0, \qquad f_1h_{57} + D_1\rho = 0; \qquad (11)$$

f et f_1 désignent des constantes, D et D_1, des fonctions du

second degré de ρ. Il résulte de là que le lieu proprement dit de g est du sixième ordre.

Le point A vérifie les équations

$$pP_5 + qP_7 + \rho P_2 = 0, \qquad p'P_5 + q'P_7 + \rho P_4 = 0, \qquad (12)$$

$$f_1(H_5P_7 - H_7P_5) + D_1\rho = 0, \qquad (13)$$

qui admettent la solution $\rho = 0$, $P_5 = P_7 = 0$. Pour écarter la droite a' qui correspond à cette solution, nous déduisons de (12) et (13) l'équation

$$\begin{vmatrix} p & q & P_2 \\ p' & q' & P_4 \\ -f_1H_7 & f_1H_5 & D_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

qui n'est plus que du second degré en ρ. Des relations (12) et (14) on conclut que la courbe (A) est une quartique unicursale.

On verrait de même que la courbe (B) est du quatrième ordre.

16. Le système $[a]$ appartient à un hyperboloïde V et le système $[b]$ à un paraboloïde V'. Conservons les notations précédentes, mais supposons que les plans (2) soient parallèles pour $\rho = \rho_1$. Alors les expressions générales des paramètres directeurs de b admettent le facteur $\rho - \rho_1$. Les équations (4) et (5) de g, après suppression de ce facteur, sont du cinquième degré en ρ; donc la surface (g) est du dixième ordre. La courbe (A), définie par les équations (1) et (5), est une unicursale du septième ordre; la courbe (B) est également de cet ordre.

Si les systèmes $[a]$ et $[b]$ ont un élément uni qui correspond à $\rho = 0$, la droite g est représentée par les équations (8) et (9), qui, après simplification, sont respectivement du quatrième et du troisième degré; donc elle engendre une surface du septième ordre. Les courbes (A) et (B), qui sont définies par une équation du troisième degré et deux équations du premier degré en ρ, sont des unicursales du cinquième ordre.

Supposons enfin que les systèmes $[a]$ et $[b]$ aient deux éléments unis, qui correspondent respectivement à $\rho = 0$, $\rho = \infty$. Les équations (11) de g étant débarrassées du facteur $\rho - \rho_1$ sont du second degré en ρ; il en résulte que la surface (g) est du quatrième ordre. L'équation (14) tombant au premier degré en ρ, les courbes (A) et (B) sont des cubiques gauches.

17. Considérons deux systèmes réglés $[a]$, $[b]$ qui appartiennent à deux paraboloïdes V', V'_1.

Les droites a et b étant représentées par les équations (1) et (2), les expressions (3) admettent respectivement des facteurs $\rho - \rho'_1$, $\rho - \rho_1$. Les équations (4) et (5) étant divisibles par le produit $(\rho - \rho'_1)(\rho - \rho_1)$, on voit que la surface (g) est du huitième ordre et que les courbes (A) et (B) sont des sextiques unicursales.

Si les systèmes $[a]$ et $[b]$ ont un élément uni qui correspond à $\rho = 0$, les valeurs générales de λ, μ, ν sont divisibles par le produit $\rho(\rho - \rho'_1)(\rho - \rho_1)$. Les équations (8) et (9) de g, après simplification, sont du troisième et du deuxième degré en ρ; par suite, la surface (g) est du cinquième ordre, et les points A et B engendrent des quartiques gauches.

Si les systèmes $[a]$ et $[b]$ ont même plan directeur sans avoir un élément uni, et qu'on fasse abstraction des droites g qui s'appuient sur deux génératrices parallèles de ces systèmes, la surface (g) est un cylindre du quatrième ordre; en effet, les quantités λ, μ, ν étant des constantes, les équations (4) et (5) sont du second degré en ρ.

Les courbes (A) et (B) sont du quatrième ordre.

18. Considérons deux systèmes réglés projectifs, $[a]$ et $[b]$, qui sont situés sur un même hyperboloïde V.

Deux droites homologues a et b peuvent être représentées par les équations

$$P_1 + \rho P_2 = 0, \qquad P_3 + \rho P_4 = 0, \tag{15}$$

$$P_1 + p\rho P_2 = 0, \qquad P_3 + p\rho P_4 = 0; \tag{16}$$

les éléments doubles des deux systèmes correspondent respectivement à $\rho = 0$, $\rho = \infty$. Les paramètres directeurs de a et b étant

$$\alpha_{13} + (\alpha_{14} + \alpha_{23})\rho + \alpha_{24}\rho^2, \text{ etc.},$$

$$\alpha_{13} + p(\alpha_{14} + \alpha_{23})\rho + \alpha_{24}\rho^2, \text{ etc.},$$

les quantités λ, μ, ν, après suppression du facteur ρ, seront des fonctions du second degré de ρ.

Les équations de g sont

$$(H_3 + \rho H_4)(P_1 + \rho P_2) - (H_1 + \rho H_2)(P_3 + \rho P_4) = 0,$$

$$(H_3 + p\rho H_4)(P_1 + p\rho P_2) - (H_1 + p\rho H_2)(P_3 + p\rho P_4) = 0,$$

ou

$$h_{31} + (h_{32} + h_{41})\rho + h_{42}\rho^2 = 0, \qquad (17)$$

$$h_{31} + p(h_{32} + h_{42})\rho + p^2 h_{42}\rho^2 = 0. \qquad (18)$$

Elles admettent les solutions $\rho = 0, h_{31} = 0$ et $\rho = \infty, h_{42} = 0$, qui correspondent aux limites vers lesquelles tendent les plans ag et bg lorsque a et b se rapprochent indéfiniment vers un élément double. Pour écarter ces plans, éliminons h_{31} et h_{42} entre les équations (17) et (18); nous aurons

$$h_{32} + h_{41} + (1 + p)h_{42}\rho = 0, \qquad (19)$$

$$(p + 1)h_{31} + p(h_{32} + h_{41})\rho = 0. \qquad (20)$$

Ces équations étant du troisième degré en ρ, la surface (g) est du sixième ordre.

La courbe (A) est définie par les équations (15) et (20); en remplaçant h_{31} par

$$H_3(-\rho P_2) - H_1(-\rho P_4),$$

et divisant ensuite par ρ, on voit que cette courbe est du quatrième ordre.

19. Si les systèmes $[a]$ et $[b]$ sont en involution, on a $p = -1$; les équations (17) et (18) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$h_{32} + h_{41} = 0, \qquad h_{31} + h_{42}\rho^2 = 0, \tag{21}$$

qui sont de la forme

$$E + E_2\rho^2 = 0, \qquad F + F_2\rho^2 + F_4\rho^4 = 0.$$

L'élimination de ρ conduit à une équation du troisième degré en P_1, P_2, P_3, P_4, de sorte que la surface (g) est du troisième ordre.

Les points A et B décrivent la même quartique.

20. Examinons enfin deux systèmes projectifs, $[a]$ et $[b]$, situés sur un même paraboloïde V. En représentant encore a et b par les équations (15) et (16), nous supposerons les plans (15) parallèles pour $\rho = \rho_1'$, et les plans (16) parallèles pour $\rho = \rho_1$. Les équations (19) et (20) sont alors divisibles par le produit $(\rho - \rho_1')(\rho - \rho_1)$; il en résulte que la surface (g) est un cylindre de second ordre et les points A et B appartiennent à une même cubique gauche.

21. Si les systèmes $[a]$ et $[b]$ sont en involution, la première des équations (21), après simplification, est indépendante de ρ; donc la droite g engendre un plan perpendiculaire au plan directeur de V', et le lieu des points A et B est la conique suivant laquelle le plan (g) coupe le paraboloïde.

SUR

LES ELLIPSES TRITANGENTES

A UNE HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

PAR

M. A. GOB

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE LIÉGE

SUR

LES ELLIPSES TRITANGENTES

A UNE HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

Dans une étude précédente (*), nous avons établi géométriquement les propriétés des ellipses tritangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements; il nous a paru intéressant de donner des démonstrations analytiques de quelques-uns de ces théorèmes. La démonstration de la propriété des ellipses considérées d'être triplement tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements dépend d'un théorème d'une portée très générale et que nous croyons nouveau. Dans un autre travail, nous étendrons ce théorème à l'espace à trois dimensions et nous en tirerons quelques conséquences relatives à la théorie des enveloppes.

1. Soient

$$F(x, y, t) = 0, \qquad f(x, y, t) = 0, \tag{1}$$

les équations de deux lignes planes u et v, t désignant un paramètre variable. Nous supposons les fonctions F et f uniformes

(*) *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 3e série, t. VI, 1906.)

et continues ainsi que leurs dérivées partielles. Lorsque t varie, les lignes u et v ont pour enveloppes deux courbes U et V, et leurs points d'intersection décrivent une ligne c dont l'équation s'obtient en éliminant t entre les équations (1).

L'équation de U résulte de l'élimination de t entre les équations

$$F(x, y, t) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Cette ligne touche généralement une ligne u aux points définis par les équations (2). Cependant il peut arriver qu'un point défini par les équations (2) soit un point singulier de u; nous admettons ici que les systèmes de courbes u et v n'ont que des points singuliers isolés.

Soit (x_1, y_1, t_1) un système de solutions des équations

$$F(x, y, t) = 0, \qquad f(x, y, t) = 0, \qquad F'_t(x, y, t) = 0; \tag{3}$$

le point M_1 (x_1, y_1) appartient alors à la fois à la ligne c et à l'enveloppe U. *Les lignes* c *et* U *sont tangentes en* M_1.

En effet, U est définie par les équations

$$F(x, y, t) = 0, \qquad F'_t(x, y, t) = 0.$$

Supposons que $F'_t = 0$; on tire $t = \omega(x, y)$; l'équation de U sera $F(x, y, \omega) = 0$ et le coefficient angulaire de la tangente sera déterminé par

$$F'_x(x, y, \omega) + F'_y(x, y, \omega)y' + F'_\omega(\omega'_x + \omega'_y y') = 0.$$

Or, au point M_1, F'_ω est identiquement nulle, parce que ω est la valeur de t tirée de l'équation $F'_t = 0$; l'équation précédente se réduit à

$$F'_x(x, y, \omega) + F'_y(x, y, \omega)y' = 0.$$

De même, la courbe c est définie par

$$F(x, y, t) = 0, \qquad f(x, y, t) = 0,$$

et si de $f(x, y, t) = 0$ on tire $t = \varepsilon(x, y)$, l'équation de c sera $F(x, y, \varepsilon) = 0$. Le coefficient angulaire de la tangente sera déterminé par

$$F'_x(x, y, \varepsilon) + F'_y(x, y, \varepsilon)y' + F'_\varepsilon(\varepsilon'_x + \varepsilon'_y y') = 0.$$

Au point M_1, $\varepsilon(x, y)$ est la valeur de t qui correspond aux courbes u et v qui passent par ce point ; donc F'_ε est nulle, car le point M_1 est sur la courbe U. L'équation précédente donne donc pour y' la valeur trouvée plus haut, et par conséquent les lignes c et U se touchent en M_1.

Cependant, si au point M_1 on avait $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, c'est-à-dire si M_1 était un point singulier de u, les courbes c et U ne seraient pas nécessairement tangentes en ce point. Dans ce cas, M_1 serait aussi un point singulier de c, car les dérivées partielles du premier membre de l'équation de cette courbe sont

$$F'_x + F'_t\frac{\partial t}{\partial x}, \qquad F'_y + F'_t\frac{\partial t}{\partial y};$$

ces dérivées sont nulles puisque $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_t = 0$.

2. Le raisonnement précédent est en défaut si $\varepsilon'_x + \varepsilon'_y y' = \infty$; or on a identiquement $f(x, y, \varepsilon) \equiv 0$, donc

$$f'_x + f'_y y' + f'_\varepsilon(\varepsilon'_x + \varepsilon'_y y') = 0.$$

On en conclut qu'en général l'hypothèse $\varepsilon'_x + \varepsilon'_y y' = \infty$ est équivalente à $f'_t = 0$ (*).

Prenons par exemple pour $f = 0$ l'équation

$$f(x, y, t) \equiv \varphi(x, y, t) + \psi(x, y, t)\,F(x, y, t) = 0.$$

(*) Le point M_1 est alors commun aux deux lignes U et V.

L'élimination de t entre cette équation et $F = 0$ donne $\varphi(x, y) = 0$. La fonction φ étant arbitraire, la courbe c ne sera pas en général tangente à U. On se trouve en effet dans le cas d'exception que nous venons d'indiquer, car on a

$$f'_t = \psi \cdot F'_t + F \cdot \psi'_t,$$

et les hypothèses $F = 0$, $F'_t = 0$ entraînent $f'_t = 0$.

3. Si au point M_1 on avait $F''_t = 0$, la courbe u aurait en ce point un contact du second ordre avec son enveloppe U. En dérivant l'équation (4) et en faisant dans l'équation obtenue $F'_t = 0$, $F''_t = 0$, on verrait que y'' a la même valeur pour les courbes c et U ; ces courbes ont donc, dans ce cas, un contact du deuxième ordre au point M_1. En particulier, si la courbe u a dans toutes ses positions un contact du deuxième ordre avec son enveloppe, les courbes c et U ont un contact du deuxième ordre aux points M_1, M_2, ...

Cette remarque peut évidemment être étendue aux contacts d'ordre supérieur.

4. Nous passons maintenant à l'étude des ellipses tritangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements.

Considérons un cercle de centre O et de rayon R et deux diamètres rectangulaires AA′ et BB′ que nous prenons comme axes coordonnés. Si nous portons sur la circonférence deux arcs $AM = -2\theta$, $AN = 4\theta$ (*), l'équation de la droite MN, que nous désignerons par u, sera

$$F(x, y, \theta) \equiv x \cos\theta + y \sin\theta - R \cos 3\theta = 0. \qquad (5)$$

(*) L'angle 2θ porte le nom d'*angle directeur* de la droite MN, les points M et N sont appelés respectivement *point primaire* et *point secondaire* de cette droite.

Lorsque θ varie, u enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements que nous désignons par U. Soit V la courbe symétrique de U par rapport à un point $C(\alpha, \beta)$, et soit v la tangente à cette courbe qui est perpendiculaire à u; son équation s'obtiendra en remplaçant dans l'équation (5) x, y par $2\alpha - x$, $2\beta - y$ et θ par $\frac{\pi}{2} + \theta$; cette équation est donc

$$f(x, y, \theta) \equiv (2\alpha - x)\sin\theta - (2\beta - y)\cos\theta + R\sin 3\theta = 0. \quad (6)$$

Soit c le lieu du point d'intersection P des lignes u et v; cette courbe sera tangente (§ 1) aux hypocycloïdes U et V.

Pour effectuer l'élimination de θ, nous mettons les équations (5) et (6) sous la forme

$$(x - \alpha)\cos\theta + (y - \beta)\sin\theta = R\cos 3\theta - \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta;$$
$$(x - \alpha)\sin\theta - (y - \beta)\sin\theta = R\sin 3\theta + \alpha\sin\theta - \beta\cos\theta,$$

on en tire

$$\begin{aligned} x - \alpha &= R\cos 2\theta - \alpha\cos 2\theta - \beta\sin 2\theta, \\ y - \beta &= -R\sin 2\theta - \alpha\sin 2\theta + \beta\cos 2\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

En éliminant 2θ, on obtient

$$[\beta(x - \alpha) - (R - \alpha)(y - \beta)]^2 + [\beta(y - \beta) - (R + \alpha)(x - \alpha)]^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2. \quad (8)$$

Ainsi la courbe c est une ellipse ayant pour centre le point C.

5. D'après le théorème que nous avons démontré au § 1, l'ellipse c est tangente à l'hypocycloïde U en un certain nombre de points; nous allons déterminer ces points de contact.

Ces points sont donnés par les équations

$$F(x, y, \theta) \equiv (x \cos\theta + y \sin\theta - R \cos 3\theta = 0,$$

$$F'_\theta(x, y, \theta) \equiv -x \sin\theta + y \cos\theta + 3R \sin 3\theta = 0,$$

$$f(x, y, \theta) \equiv (2\alpha - x) \sin\theta - (2\beta - y) \cos\theta + R \sin 3\theta \equiv 0.$$

En retranchant la deuxième équation de la troisième, on obtient

$$\alpha \sin\theta - \beta \cos\theta - R \sin 3\theta = 0.$$

Cette équation détermine les valeurs de θ correspondant aux points de contact. Elle se déduit de l'équation (5) de la droite u en y remplaçant α, β, θ par $-\alpha$, $-\beta$, $\frac{\pi}{2} + \theta$; elle exprime donc que la tangente en chacun des points de contact est perpendiculaire à l'une des tangentes menées à U par le symétrique de C par rapport à O.

Ainsi l'*ellipse* c *est tritangente à l'hypocycloïde, et les tangentes communes à ces courbes forment un triangle principal* (*) *ayant pour orthocentre le symétrique* C_1 *de* C *par rapport à* O.

On sait que le point O est le centre du cercle d'Euler de tout triangle principal ; on déduit de là que *le centre* C *de l'ellipse* c *est le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes communes.*

6. Lorsque α et β varient, l'ellipse c varie en restant tritangente à l'hypocycloïde U.

Lorsque l'ellipse variable passe par un point fixe $Q(x', y')$, et si l'on considère α et β comme les coordonnées courantes, l'équation du lieu de son centre s'obtiendra en éliminant θ

(*) Nous appelons *triangle principal* d'une hypocycloïde à trois rebroussements, un triangle formé par trois tangentes perpendiculaires aux tangentes menées d'un point H à cette courbe. Ce triangle a pour orthocentre le point H et ses droites de Simson sont tangentes à l'hypocycloïde.

entre les équations (5) et (6) où l'on a remplacé x et y par x' et y' :

$$x' \cos\theta + y' \sin\theta = R \cos 3\theta, \qquad (9)$$

$$(2\beta - y') \sin\theta - (2\alpha - x') \cos\theta = R \sin 3\theta. \qquad (10)$$

Si θ_1, θ_2, θ_3 sont les valeurs de θ déduites de l'équation (9), le lieu de C se composera des trois droites

$$(2y - y') \cos\theta_i - (2x - x') \sin\theta_i = R \sin 3\theta_i \,.\, (i = 1, 2, 3) \qquad (11)$$

Or, l'équation (9) indique que θ_1, θ_2, θ_3 sont les valeurs de θ correspondant aux tangentes menées par Q à l'hypocycloïde, et l'équation (10) se déduit de l'équation d'une de ces tangentes en y remplaçant x, y, θ_i par $2x - x'$, $2y - y'$, $\frac{\pi}{2} + \theta_i$. Les droites représentées par l'équation (11) sont donc les homothétiques par rapport à Q des tangentes perpendiculaires aux tangentes menées par Q, le rapport d'homothétie étant 1 : 2. Le point Q étant l'orthocentre du triangle formé par ces trois tangentes, on voit que *lorsque l'ellipse* c *passe par un point fixe* Q, *le lieu de son centre se compose de trois droites perpendiculaires aux tangentes menées par* Q *à* U *et formant un triangle inscrit au cercle* O *et ayant* Q *pour orthocentre.*

7. Il résulte de ce qui précède, que l'équation (8) doit être décomposable en un produit de trois facteurs du premier degré en α et β. La possibilité de cette décomposition peut se démontrer directement; si l'on pose

$$A = \beta(x - \alpha) - (R - \alpha)(y - \beta),$$
$$B = \beta(y - \beta) - (R + \alpha)(x - \alpha),$$
$$C = \alpha^2 + \beta^2 - R^2,$$

l'équation (8) est de la forme

$$A^2 + B^2 = C^2.$$

Si l'on considère α et β comme les coordonnées courantes, les équations $A = 0$, $B = 0$ représentent deux coniques passant par le point $\alpha \equiv x$, $\beta \equiv y$; les trois autres points d'intersection se trouvent sur le cercle $C \equiv 0$, car en faisant le produit des deux premières équations mises sous la forme

$$\beta(x - \alpha) = (R - \alpha)(y - \beta),$$
$$\beta(y - \beta) = (R + \alpha)(x - \alpha),$$

on retrouve l'équation $C = 0$. Les trois coniques $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ ont trois points communs; donc la cubique $A^2 + B^2 = C^2$ a trois points doubles et doit se décomposer en trois droites.

8. Si l'on transporte l'origine au point C, l'équation (8) devient

$$y^2[\beta^2 + (R - \alpha)^2] - 4R\beta xy + x^2[\beta^2 + (R + \alpha)^2] = (\alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2. \qquad (11)$$

Soit ω l'inclinaison d'un axe de symétrie de c sur l'axe des x. Cet angle est donné par l'équation

$$\operatorname{tg}^2 \omega - 2\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tg}\omega - 1 = 0.$$

Si l'on désigne par φ l'angle AOC, on a donc

$$\operatorname{tg} 2\omega = -\operatorname{tg}\varphi,$$

d'où

$$\omega = -\frac{\varphi}{2}, \qquad \text{ou} \qquad \omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \qquad (12)$$

L'équation aux carrés des longueurs a et b des demi-axes est

$$Z^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2 + R^2)Z + (\alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2 = 0,$$

d'où

$$a = \delta + R, \qquad b = |\delta - R|, \qquad (13)$$

δ représentant la distance OC.

Il résulte des formules (12) et (13) que *si l'ellipse* c *se déplace en restant de forme et de grandeur constantes, son centre décrit un cercle du centre* O *et ses axes enveloppent deux hypocycloïdes.*

9. Proposons-nous de construire la tangente en un point P de l'ellipse *c*. Désignons par γ son inclinaison sur l'axe des x; en dérivant les équations (7), on obtient

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{dy}{dx} = \frac{\beta \sin 2\theta + (R+\alpha)\cos 2\theta}{\beta \cos 2\theta + (R-\alpha)\sin 2\theta}$$

ou

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{R\cos 2\theta + \delta\cos(2\theta-\varphi)}{-R\sin 2\theta + \delta\sin(2\theta-\varphi)}. \qquad (14)$$

Soit C′ le symétrique de C par rapport à la parallèle menée par O à la droite MN; l'angle AOC′ est égal à $\pi + 2\theta - \varphi$ et les coordonnées de M sont $R\cos 2\theta$ et $-R\sin 2\theta$, donc

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{x_M - x_{C'}}{y_M - x_{C'}}.$$

La tangente en P est donc perpendiculaire à MC′.

10. Cherchons l'inclinaison γ' de la tangente au point P de l'ellipse *c* sur un axe de cette courbe, par exemple sur celui qui fait avec OA un angle égal à $-\frac{\varphi}{2}$. On a

$$\operatorname{tg}\gamma' = \frac{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

d'où, en remplaçant $\operatorname{tg}\gamma$ par sa valeur (14),

$$\operatorname{tg}\gamma' = \frac{R+\delta}{R+\delta}\operatorname{cotg}\left(2\theta - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Il résulte de là que si δ est constant, c'est-à-dire si l'ellipse c se déplace en restant de forme et de grandeur constantes, les formules (7) donnent les coordonnées d'un même point de l'ellipse mobile, pourvu que l'on remplace dans ces formules α et β par $\delta \cos\varphi$ et $\delta \sin\varphi$ et que l'on suppose que $2\theta - \frac{\varphi}{2}$ conserve une valeur constante.

11. Lorsque l'ellipse c se déplace en restant de forme et de grandeur constantes, elle a une enveloppe dont fait évidemment partie l'hypocycloïde ; mais comme une ellipse variable touche son enveloppe en quatre points, l'enveloppe complète de c doit comprendre une courbe complémentaire que nous allons déterminer.

En remplaçant dans les formules (7) α et β par $\delta \cos\varphi$ et $\delta \sin\varphi$, on peut les mettre sous la forme

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\cos 2\theta + 2\delta \sin\theta \sin(\theta - \varphi), \\ y &= -\mathrm{R}\sin 2\theta - 2\delta \cos\theta \sin(\theta - \varphi). \end{aligned} \tag{15}$$

Considérons la courbe définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\cos 2\theta + 2\delta \sin\theta, \\ y &= -\mathrm{R}\sin 2\theta - 2\delta \cos\theta. \end{aligned} \tag{16}$$

Cette courbe est une hypotrochoïde k engendrée par le roulement d'un cercle de rayon δ à l'intérieur d'un cercle de rayon 3δ et de centre O, le point générateur étant à une distance égale à R du centre du cercle mobile.

Si l'on dérive les équations (15) et (16), on obtient pour l'ellipse

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -2\mathrm{R}\sin 2\theta + 2\delta \sin(2\theta - \varphi), \\ \frac{dy}{d\theta} &= -2\mathrm{R}\cos 2\theta - 2\delta \cos(2\theta - \varphi), \end{aligned} \tag{17}$$

et pour l'hypotrochoïde

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -2R\sin 2\theta + 2d\cos\theta, \\ \frac{dy}{d\theta} &= -2R\cos 2\theta + 2d\sin\theta. \end{aligned} \tag{18}$$

Si l'on suppose $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$, les formules précédentes donnent pour x, y, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ les mêmes valeurs pour l'ellipse et l'hypotrochoïde. Les courbes c et k sont donc tangentes au point K défini par $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$, c'est-à-dire que le point K est situé sur la tangente à l'hypocycloïde U parallèle à OC. La courbe complémentaire cherchée est la courbe k.

12. Soient c et c' deux positions différentes de l'ellipse c, K et K′ les points de contact de ces courbes avec k. Faisons coïncider c' avec c, et soit K_1 la position prise alors par K′ sur l'ellipse c; nous convenons de dire que les arcs KK_1 de l'ellipse et KK′ de l'hypotrochoïde sont des arcs correspondants de ces courbes. Nous allons démontrer qu'il existe un rapport constant entre deux arcs correspondants quelconques des courbes c et k, c'est-à-dire que *le mouvement d'une ellipse de forme et de grandeur invariables qui se déplace en restant tritangente à l'hypocycloïde* U *se réduit à un roulement uniforme sur l'hypotrochoïde* k *accompagné d'un glissement également uniforme sur cette courbe.*

Désignons par s et par s' les arcs KK′ et KK_1; les formules (18) et (17) donnent

$$\frac{ds}{d\theta} = 2\sqrt{R^2 + \delta^2 - 2\delta R\sin 3\theta},$$

$$\frac{ds'}{d\theta} = 2\sqrt{R^2 + \delta^2 + 2\delta R\cos(4\theta - \varphi)},$$

d'où, en désignant par C′ le centre de c' et par φ' l'angle AoC′

$$s = 2\int_{\theta=\frac{\pi}{2}+\varphi}^{\theta'=\frac{\pi}{2}+\varphi'} \sqrt{R^2+\delta^2-2\delta R\sin 3\theta}\,d\theta,$$

$$s' = \int_{\theta}^{\theta_1} \sqrt{R^2+\delta^2+2\delta R\cos(4\theta-\varphi)}\,d\theta.$$

Il reste à établir la relation entre les limites supérieures θ_1 et θ'. Or K′ et K_1 étant des points correspondants des ellipses c' et c, on a (§ 10)

$$2\theta_1-\frac{\varphi}{2}=2\theta'-\frac{\varphi'}{2},$$

d'où

$$\theta_1=\theta'+\frac{\varphi-\varphi'}{4}.$$

Donc la limite supérieure de la seconde intégrale est

$$\theta_1-\frac{\pi}{2}+\varphi'+\frac{\varphi-\varphi'}{4}=\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi+3\varphi'}{4}.$$

Transformons la seconde intégrale en posant

$$4\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}+3\Theta;$$

on obtient

$$s'=\frac{3}{2}\int_{\Theta=\frac{\pi}{2}+\varphi}^{\Theta=\frac{\pi}{2}+\varphi'} \sqrt{R^2+\delta^2-2\delta R\sin 3\Theta}\,d\Theta=\frac{3}{4}s.$$

Le rapport des arcs s et s' est donc constant et égal à $\frac{4}{3}$.

13. Proposons-nous de déterminer les points de rencontre de l'ellipse c avec le cercle tritangent à l'hypocycloïde U.

Mettons les équations (7) sous la forme

$$x = \mathrm{R}\cos 2\theta + 2\sin\theta\,(\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta);$$

$$y = -\mathrm{R}\sin 2\theta - 2\cos\theta\,(\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta),$$

on en tire

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2 + 4(\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta)^2 + 4\mathrm{R}\sin 3\theta\,(\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta).$$

Si l'on suppose $x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$, cette équation se décompose dans les deux suivantes :

$$\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta = 0,$$

$$\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta + \mathrm{R}\sin 3\theta = 0.$$

La première indique qu'un des points d'intersection se trouve sur la tangente à l'hypocycloïde qui est perpendiculaire à OC ; la seconde, que les trois autres points de rencontre sont situés sur les tangentes à l'hypocycloïde qui sont perpendiculaires aux tangentes menées par C.

Si deux de ces tangentes coïncident, le point C sera un point de l'hypocycloïde ; mais dans ce cas, deux des points de rencontre de c avec le cercle O coïncident. Donc, *si une ellipse a son centre sur* U *et est tritangente à cette courbe, elle sera aussi tangente au cercle tritangent à l'hypocycloïde.*

14. L'hypocycloïde étant une courbe du quatrième ordre, doit avoir, outre ses trois points de contact avec l'ellipse c, deux points communs avec cette courbe. Proposons-nous de déterminer ces points.

Les coordonnées du point de contact d'une tangente à l'hypocycloïde dont l'angle directeur est θ_1 sont

$$\begin{aligned} x &= 2R\cos 2\theta_1 - R\cos 4\theta_1, \\ y &= -2R\sin 2\theta_1 - R\sin 4\theta_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Ce point sera situé sur c si ses coordonnées vérifient les équations

$$x\cos\theta + y\sin\theta \equiv R\cos 3\theta, \tag{20}$$

$$(2\alpha - x)\sin\theta - (2\beta - y)\cos\theta + R\sin 3\theta = 0. \tag{21}$$

Pour obtenir θ_1, il faut éliminer x, y, θ entre ces quatre équations.

Remplaçons d'abord x et y par les valeurs (19) dans l'équation (20); on obtient successivement

$$(2\cos 2\theta_1 - \cos 4\theta_1)\cos\theta - (2\sin 2\theta_1 + \sin 4\theta_1) = \cos 3\theta,$$

$$2\cos(2\theta_1 + \theta) - \cos(4\theta_1 - \theta) = \cos 2\theta,$$

$$\cos(2\theta_1 + \theta) - \cos(4\theta_1 - \theta) = \cos 3\theta - \cos(2\theta_1 + \theta),$$

$$2\sin 3\theta_1 \sin(\theta_1 - \theta) = 2\sin(2\theta + \theta_1)\sin(\theta_1 - \theta).$$

Nous écartons la solution $\theta_1 = \theta + K\pi$ qui donnerait un des points de contact de c et U. On a donc

$$3\theta_1 = 2k\pi + 2\theta + \theta_1 \qquad \text{ou} \qquad 3\theta_1 = 2k\pi + \pi - 2\theta - \theta_1.$$

La première solution doit être rejetée, car elle donnerait encore $\theta_1 = \theta + K\pi$; la seconde donne

$$\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2\theta_1.$$

Remplaçons θ par cette valeur et x, y par les valeurs (19) dans l'équation (21) mise sous la forme

$$2\alpha \sin\theta - 2\beta\cos\theta = x\sin\theta - y\cos\theta - R\sin 3\theta.$$

Nous obtenons

$$2\alpha\cos 2\theta_1 - 2\beta\sin 2\theta_1$$
$$= (2R\cos 2\theta_1 - R\cos 4\theta_1)\cos 2\theta_1 + (2R\sin 2\theta_1 + R\sin 4\theta_1)$$
$$\sin 2\theta_1 + R\cos 6\theta_1$$

ou

$$\alpha\cos 2\theta_1 - \beta\sin 2\theta_1 = R. \qquad (22)$$

Or l'équation $\alpha x + \beta y = R^2$ représente la polaire de C par rapport au cercle O et R *cos* $2\theta_1$; — R *sin* $2\theta_1$ sont les coordonnées du point primaire de la tangente à l'hypocycloïde au point que nous cherchons. Donc, *les tangentes menées à l'hypocycloïde en ses points de rencontre avec l'ellipse* c *ont pour points primaires les points de contact des tangentes menées de* C *au cercle* O.

SUR

LES SURFACES ENGENDRÉES

PAR

LES QUADRISÉCANTES

DE

CERTAINS QUATERNES VARIABLES DE DROITES

PAR

Jean DEGUELDRE

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE DE TOURNAI

SUR

LES SURFACES ENGENDRÉES

PAR

LES QUADRISÉCANTES

DE

CERTAINS QUATERNES VARIABLES DE DROITES

Je me propose d'étudier la surface engendrée par les quadrisécantes de quatre droites a, b, c, d dont l'une au moins est variable. Une telle droite sera représentée par g et son lieu géométrique par Σ. Lorsque les droites a, b, c, d, ou certaines d'entre elles, décriront des faisceaux de rayons, j'appellerai les plans de ces faisceaux α, β, γ, δ et leurs sommets A, B, C, D. Je désignerai par (a, b, c) la quadrique réglée ayant pour directrices a, b, c, et par cône (P, a, b), le lieu géométrique de la droite d'intersection des plans Pa, Pb, P étant un point fixe et les droites a, b variant d'après une loi donnée.

1. Dans la suite, j'emploierai fréquemment la proposition suivante :

Le cône (P, a, b) *est du second ordre lorsque* a *et* b *sont des rayons homologues de deux faisceaux projectifs ; il est du troisième*

ordre si a *engendre un faisceau et* b *un système réglé projectif avec le faisceau* [a]; *il est du quatrième ordre lorsque* a *et* b *sont des éléments homologues de deux systèmes réglés projectifs.*

Dans le premier cas, les plans Pa et Pb se correspondent dans deux faisceaux projectifs; le lieu géométrique de leur intersection est donc un cône du second ordre.

Dans le second cas, Pa engendre un faisceau du premier ordre et Pb un faisceau du second ordre; ces faisceaux étant projectifs, le cône est du troisième ordre.

Enfin, si a et b sont des rayons homologues de deux systèmes réglés projectifs, Pa et Pb engendrent des faisceaux du second ordre projectifs et le lieu considéré est du quatrième ordre.

Je m'appuierai aussi sur le théorème suivant :

Étant données dans l'espace deux droites, d et d', supports de deux ponctuelles entre lesquelles il existe une correspondance (m, m'), la droite qui joint deux points homologues engendre une surface d'ordre $m + m'$; les directrices d, d' sont des droites de la surface respectivement d'ordres m' et m.

2. M. J. Neuberg a déterminé le nombre μ des quadriques (a, b, c) passant par un point quelconque de l'espace, dans les cas suivants :

1° a et b sont fixes, c est un rayon variable d'un système réglé : $\mu = 2$;

2° a est fixe, b et c sont des rayons homologues de deux faisceaux projectifs : $\mu = 2$;

3° a est fixe, b et c sont des éléments homologues quelconques d'un faisceau de rayons et d'un système réglé qui sont projectifs : $\mu = 3$;

4° a est fixe, b, c sont des rayons homologues de deux systèmes réglés projectifs : $\mu = 4$;

5° a, b, c sont des rayons homologues de trois faisceaux de rayons projectifs : $\mu = 3$;

6° a, b, c sont des rayons homologues de deux faisceaux et d'un système réglé qui sont projectifs : $\mu = 4$;

7° a, b, c sont des éléments homologues d'un faisceau de rayons et de deux systèmes réglés projectifs;

8° a, b, c sont des éléments homologues de trois systèmes réglés projectifs : $\mu = 6$ (*).

Ces résultats nous serviront dans notre étude.

3. a, b, c *sont fixes et* d *décrit un faisceau.*

Une droite s'appuyant sur a, b, c rencontre un rayon d et n'en rencontre qu'un seul. La surface Σ est donc la quadrique (a, b, c).

4. a, b *sont fixes*, c *et* d *sont des rayons homologues de deux faisceaux projectifs.*

Soit P un point de a. Le cône quadratique (P, c, d) (**1**) est rencontré par b en deux points. Il passe donc deux droites g par tout point de a ou par tout point de b. Σ est donc une surface du *quatrième ordre* dont a et b sont des *directrices doubles* (**1**).

La transversale des droites a et b menée par C est une droite g; il en est de même de la droite joignant les points d'intersection de a et b avec le plan γ. La section de la surface par le plan de l'un des faisceaux se compose donc d'une droite et d'une *cubique* passant par le sommet du faisceau. La droite $\gamma\delta$ coupe les faisceaux $[c]$ et $[d]$ suivant deux ponctuelles projectives dont les éléments doubles E, F appartiennent à la cubique. Les deux droites g qui s'appuient sur les rayons CE, DE sont : 1° l'intersection des plans Ea, Eb; 2° la droite qui joint les points de rencontre du plan CED avec les droites a, b. La droite CD rencontre Σ en quatre points qui sont C, D et les points situés sur les droites joignant les points de rencontre de a et b avec le plan CED ou CFD.

(*) J. Neuberg, *Sur quelques systèmes de quadriques réglées.* (Mémoires de la Société scientifique de Bruxelles, t. XXXIV.)

5. a *est fixe*, b, c *et* d *sont des rayons homologues de trois faisceaux projectifs deux à deux.*

Il existe trois quadriques réglées (b, c, d) passant par un point quelconque de l'espace (**2**). Il passe donc trois droites g par un point quelconque de a, et a est une *directrice triple* de la surface.

Un plan π, mené par a, coupe b, c, d en B′, C′, D′. Les ponctuelles [B′], [C′], [D′] qui ont pour supports respectifs les droites $\pi\beta$, $\pi\gamma$, $\pi\delta$ sont projectives deux à deux ; les droites B′C et B′D′ enveloppent donc des coniques touchant la droite $\pi\beta$; les trois autres tangentes communes à ces courbes sont trois droites g du plan π. La surface Σ est coupée par le plan π suivant trois droites simples et une droite triple : elle est donc du *sixième ordre.*

Le cône (B, c, d) est du second ordre (**1**) ; deux de ses génératrices rencontrent donc a et sont, par suite, des droites g. B, C, D sont donc des *points doubles* de Σ.

Soit K le point de rencontre de a et β ; le cône quadratique (K, c, d) est coupé par le plan β suivant deux droites qui appartiennent à Σ. Le plan de l'un des faisceaux coupe donc la surface suivant deux droites et une *quartique* passant deux fois par le sommet du faisceau.

Par un raisonnement analogue à celui que nous avons indiqué à la fin du cas précédent, on trouve les deux points autres que les points doubles C, D, où la droite CD rencontre la surface Σ.

6. a, b, c, d *sont des rayons homologues de quatre faisceaux projectifs deux à deux.*

Les quadriques (b, c, d) passant par A sont au nombre de trois (**2**). A, B, C et D sont donc des *points triples* de Σ.

L'ordre de la surface pourra être établi en déterminant le nombre de ses points situés sur la droite AB. Il est d'abord évident que cette droite n'appartient pas au lieu, car elle s'appuie sur des rayons c et d non homologues. Les faisceaux

$[a]$, $[b]$ sont coupés par la droite $\alpha\beta$ suivant deux ponctuelles projectives qui ont deux points doubles E et F. Le plan ABE coupe les rayons c, d homologues de $a \equiv \mathrm{AE}$ en des points situés sur une droite g; le plan ABF en détermine une seconde. Ces deux droites rencontrent AB puisqu'elles se trouvent dans des plans menés par AB. On obtient donc huit points du lieu sur AB, et Σ est du *huitième ordre*.

Le plan α contient trois droites g. En effet, les rayons b, c, d coupent les droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ en des points B′, C′, D′ qui engendrent des ponctuelles projectives deux à deux. Les droites B′C′, B′D′ enveloppent des courbes du second ordre tangentes à la droite $\alpha\beta$; les trois autres tangentes communes à ces coniques sont les droites g du plan α. La section de Σ par l'un des plans des faisceaux se compose de trois droites et d'une *quintique* ayant un point triple au sommet du faisceau.

On peut démontrer qu'une droite quelconque l rencontre Σ en huit points. A cet effet, considérons une quadrisécante g_1 de l, a, b, c et une quadrisécante g_2 de l, b, c, d; soient X_1 et X_2 les points d'intersection de ces droites avec l. Il passe trois droites g_1 par X_1 ou trois droites g_2 par X_2 (**5**). Comme quatre droites admettent deux quadrisécantes, les points X_1, X_2 sont liés par une correspondance (6, 6). Mais parmi les douze coïncidences, il faut en excepter quatre qui ne donnent pas lieu à des droites de Σ. Ainsi, lorsque b et c sont dans le même plan, ce qui se produit deux fois, les droites g_1, g_2 passent par le point d'intersection du plan bc avec l sans coïncider. De même, lorsque l'une des droites b, c rencontre l, la coïncidence des points X_1 et X_2 n'entraîne pas celle de g_1 et g_2.

7. a, b, c *sont fixes*, d *est un rayon quelconque d'un système réglé.*

Une droite s'appuyant sur a, b, c rencontre deux génératrices du système réglé; c'est donc une droite double de la surface. Le lieu est donc la quadrique (a, b, c) comptée deux fois.

8. a, b *sont fixes*, c *et* d *engendrent un faisceau de rayons et un système réglé projectifs.*

Le cône (A, *c*, *d*) qui a pour sommet un point A de *a* est du troisième ordre (**1**). Ses trois génératrices rencontrant *b* sont des droites *g*. Il en résulte que Σ est une surface du *sixième ordre* dont *a* et *b* sont deux *directrices triples*.

La droite qui joint les points de percée de *a* et *b* avec γ est une *droite double* de la surface : en effet, elle rencontre deux rayons du système réglé. Il en est de même de la droite d'intersection des plans C*a* et C*b*. D'après cela, la section de Σ par le plan γ se compose d'une droite double et d'une *quartique* ayant un point double en C.

9. a, b *sont fixes*, c *et* d *sont des rayons homologues de deux systèmes réglés projectifs.*

Le cône (A, *c*, *d*) ayant pour sommet un point quelconque A de *a* est du quatrième ordre (**1**). On en déduit qu'il passe quatre droites *g* par A. Σ possède donc deux *directrices quadruples* et est du *huitième ordre*.

10. a *est fixe*, b, c *et* d *sont des rayons homologues de deux faisceaux et d'un système réglé projectifs.*

Il passe quatre quadriques (*b*, *c*, *d*) par un point quelconque de *a* (**2**) ; cette dernière droite est donc une *directrice quadruple* de la surface.

Le cône du troisième ordre (B, *c*, *d*) (**1**) est coupé par le plan B*a* suivant trois droites *g* passant par B : les sommets des faisceaux sont donc des *points triples* de Σ.

Le plan B*a* contient encore une autre droite *g* ; car ce plan coupe β suivant un rayon *b* et en M et N les droites *c* et *d* qui lui correspondent ; MN est une droite *g*.

La surface Σ est coupée par le plan B*a* suivant huit droites dont quatre coïncident avec *a* : elle est donc du *huitième ordre*.

Il existe deux autres droites g s'appuyant sur la droite de jonction des sommets des faisceaux; on les obtient dans les deux plans qui contiennent à la fois un rayon b et un rayon c.

Soit K le point d'intersection de a avec β. Le plan β coupe le cône du troisième ordre (K, c, d) suivant trois droites g. Le plan β coupe donc Σ suivant trois droites et une *quintique* ayant un point triple en B; cette courbe passe par K.

11. a *est fixe*, b, c *et* d *sont des rayons homologues d'un faisceau et de deux systèmes réglés projectifs.*

Les quadriques (b, c, d) passant par un point quelconque de a sont au nombre de cinq (**2**) : a est donc une *directrice quintuple* de la surface.

Le cône (B, c, d) est du quatrième ordre (**1**); il passe donc quatre droites g par B. Enfin le plan Ba qui passe par un rayon du faisceau [b] contient une autre droite du lieu. On obtient donc dix droites g dans le plan Ba, et Σ est du *dixième ordre.*

Le plan β contient quatre droites g passant par le point d'intersection K de a avec β; cela résulte de ce que le cône (K, c, d) est du quatrième ordre. Le plan β coupe donc Σ suivant ces quatre droites et une *sextique* ayant un point quadruple en B; cette courbe passe par K.

12. a *est fixe*, b, c *et* d *sont des rayons homologues de trois systèmes réglés projectifs deux à deux.*

Les quadriques (b, c, d) passant par un point de a sont au nombre de six (**2**); on en déduit que a est une *directrice sextuple* de Σ.

L'ordre de Σ peut s'obtenir en cherchant le nombre de ses points situés sur une droite quelconque l. A cet effet, considérons une quadrisécante g_1 du groupe a, b, c, l et une quadrisécante g_2 du groupe a, c, d, l; soient X_1 et X_2 leurs points d'intersection avec l. Par X_1 il passe quatre droites g_1 (**9**). A

chacune d'elles il correspond un groupe a, b, c qui donne naissance à deux quadrisécantes g_2; les points X_1 et X_2 sont donc liés par une correspondance (8,8). Il est facile de prouver que quatre des seize coïncidences ne sont pas des points de Σ. Soit P l'un des points où l rencontre le système (c). Les points X_1 et X_2 peuvent coïncider en P sans que g_1 et g_2 coïncident. De même, si l'on considère l'un des deux rayons c s'appuyant sur a, on obtient dans le plan ac deux droites g_1, g_2 distinctes, mais passant par le même point de l. Il ne reste que douze coïncidences, et la surface est du *douzième ordre*.

13. a, b, c, d *sont des rayons homologues de trois faisceaux et d'un système réglé projectifs.*

Il passe quatre quadriques (b, c, d) par A. Les sommets des faisceaux sont donc des points *quadruples* de Σ.

Lorsque les rayons a et b sont dans un même plan, on obtient une droite g située dans ce plan. La droite AB rencontre donc la surface en deux points quadruples et deux points simples, et Σ est du *dixième ordre*.

Déterminons le nombre des droites g du plan α; soit m une droite quelconque de ce plan. Les quadrisécantes de m, b, c, d engendrent une surface de huitième ordre dont m est une directrice quadruple (**10**). Le plan α coupe cette surface suivant quatre droites qui sont les droites g cherchées. Il en résulte que la section de Σ par le plan de l'un des faisceaux se compose de quatre droites et d'une *sextique* ayant un point quadruple au sommet du faisceau.

14. a, b, c, d *sont des rayons homologues de deux faisceaux et de deux systèmes réglés projectifs.*

Il passe cinq quadriques (b, c, d) par A (**2**). Les sommets des faisceaux sont donc des points *quintuples* de la surface. Comme il existe deux droites g rencontrant AB en des points différents de A et B, la surface est du *douzième ordre*.

On prouve aisément que le plan α contient cinq droites g. Considérons, à cet effet, une droite quelconque m de ce plan. Les quadrisécantes aux groupes m, b, c, d engendrent une surface du dixième ordre dont m est une directrice quintuple (**11**) ; le plan α coupe cette surface suivant cinq droites de Σ. Il s'ensuit que le plan de l'un des faisceaux coupe la surface Σ suivant cinq droites et une courbe du *septième ordre* ayant un point quintuple au sommet du faisceau.

15. a, b, c, d *sont des rayons homologues d'un faisceau et de trois systèmes réglés projectifs.*

A est un point sextuple de Σ, car il passe par ce point six quadriques (b, c, d) (**2**).

Il est aisé de prouver qu'une droite quelconque l rencontre Σ en quatorze points. A cet effet, considérons une quadrisécante g_1 du groupe l, b, c, d, et soit a' le rayon qui joint son point de percée avec α au point A. Le rayon a détermine deux rayons a' ; au rayon a' correspondent douze droites g_1 et par suite douze droites a : en effet, les quadrisécantes des groupes l, b, c, d engendrent une surface du douzième ordre (**12**) ; cette surface coupe a' en douze points appartenant aux droites g_1 considérées. Les quatorze coïncidences $a\,a'$ correspondent à quatorze droites g rencontrant l ; Σ est donc du *quatorzième ordre.*

Un rayon a donnant naissance à deux droites g, ces droites g percent le plan α en des points situés sur une courbe du *huitième ordre* ayant un point sextuple en A. Pour que la section soit complète, il faut que α contienne six droites g. On peut du reste démontrer directement ce résultat sans tenir compte de l'ordre de Σ. Il suffit d'adapter au cas présent le procédé employé aux n^{os} (**13**) et (**14**).

16. a, b, c, d *sont des rayons homologues de quatre systèmes réglés projectifs deux à deux*

Déterminons le nombre des droites g s'appuyant sur une

droite quelconque l; soient g_1 et g_2 des quadrisécantes des groupes l, a, b, c et l, b, c, d; désignons par X_1 et X_2 leurs points d'intersection avec l. Il passe six droites g_1 par X_1 ou six droites g_2 par X_2 (**6**). Les points X_1 et X_2 liés par une correspondance (**12,12**) coïncideront vingt-quatre fois. Il faut excepter huit de ces coïncidences qui ne donnent pas lieu à des droites de Σ, à savoir : les quatre points d'intersection de l avec les systèmes réglés (b) et (c) et quatre autres situés dans les plans qui contiennent deux rayons homologues de ces systèmes (*). La surface Σ est actuellement du *seizième ordre*.

(*) Il est aisé de prouver que les rayons homologues b et c se rencontrent quatre fois. Soit C_1 l'un des points d'intersection de c avec le système (b); il passe une droite b_1 de ce système par le point C_1; si l'on appelle B et B_1 les points d'intersection de b et b_1 avec une génératrice quelconque du second mode du système réglé b, il suffira d'observer que ces points sont liés par une correspondance (2,2).

CALCITE DE KELLEYS (ISLANDE)

ET

DE GOTLAND (SUÈDE)

FORMES A NOTATION COMPLIQUÉE

DIRECTION DES STRIES

PAR

G. CESÀRO

Membre de l'Académie royale de Belgique
Professeur de cristallographie à l'Université de Liége.

CALCITE DE KELLEYS (ISLANDE)

ET

DE GOTLAND (SUÈDE)

FORMES A NOTATION COMPLIQUÉE

DIRECTION DES STRIES

Calcite d'Islande.

J'ai reçu dernièrement de M. l'ingénieur Grebel, de Genève, deux échantillons de calcite provenant de Kelleys (lac Erie), dont les cristaux semblent, à première vue, avoir la forme caractéristique de l'isoscéloèdre de Rhisnes

$$L = 16.8.3\ (*) = d^{1}d^{1/9}b^{1/7}.$$

Le premier spécimen, n° 58, consiste en un cristal isolé, de 3 à 4 centimètres de hauteur, transparent, jaune brunâtre clair, ayant la forme d'un isoscéloèdre aigu. Malgré leur apparente netteté, les faces de ce cristal sont mal réfléchissantes; or l'angle dièdre ne détermine un isoscéloèdre aigu qu'à condition d'être précis. Mais la netteté des arêtes du cristal permet de

(*) Axe des $\overset{+}{x}$: L^2 situé en avant à droite; axe des $\overset{+}{y}$: L^2 situé en avant à gauche; axe des z : A^3. C'est-à-dire que la face que nous notons *hkl* s'écrit $k.\ h-k.\ \overline{h}.\ l$ dans la notation employée habituellement.

mesurer au microscope, avec précision, l'angle α qu'elles font entre elles; d'ailleurs cet angle varie plus d'un isoscéloèdre à l'autre que l'angle dièdre φ (*) de l'arête culminante, car de

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos\frac{\varphi}{2}},$$

on déduit, par exemple,

φ	57°	58°	59°
α	19°34′,5	16°4′,5	11°26′.

Des mesures très nettes m'ont donné, comme moyenne, dans le n° 58,

$$\alpha = 13^\circ 40'.$$

Si $21l$ est la notation de l'isoscéloèdre, on déduit de l'angle ci-dessus

$$l = \frac{3\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{s\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}} = 0{,}36253\ (**).$$

En consultant la liste des isoscéloèdres (***), on voit que cette valeur de l s'approche beaucoup de celle de l'isoscéloèdre de Rhisnes, pour lequel on a

$$l = 0{,}375;\ \alpha = 14^\circ 16'40''.$$

J'ai pu aussi mesurer approximativement dans ce cristal, au goniomètre, l'angle de l'arête basique, qui a été trouvé de 24° à 25°; or, pour l'isoscéloèdre de Rhisnes, on a

$$\text{LL sur } d^1 = 24^\circ 45'28''.$$

(*) α angle vrai de deux arêtes culminantes contiguës, φ angle polaire.

(**) $s = \frac{3}{4}\frac{a^2}{c^2} = 1{,}02764.$

(***) Voir, par exemple : *Les formes cristallines de la calcite de Rhisnes.* (Ann. de la Soc. géol. de Belgique, t. XVI, Mémoires, 1889, p. 361.)

Ce cristal montre vers le haut le rhomboèdre premier aigu $e^1 = 021$, dont *une* face miroitante a pu donner pour l'angle avec le clivage

$$pe^1 = 50°30'.$$

On aperçoit aussi dans la terminaison le scalénoèdre $d^2 = 521$ sous forme d'un petit biseau à faces peu nettes. Enfin, un dépôt plus récent est venu recouvrir la partie supérieure du cristal; on le voit débordant sur les contours des faces e^1, qui en sont très inégalement recouvertes; ce dépôt, à faces courbes et indéterminables, se termine par un rhomboèdre inverse coupant le clivage suivant une ligne courbe dont la direction près du sommet culminant semble indiquer le rhomboèdre $e^{1/2}$ inverse du primitif; en autres termes, la partie rhomboédrique du nouveau dépôt paraît être formée d'une suite plus ou moins continue de rhomboèdres inverses variant de e^1 à $e^{1/2}$; la face rhomboédrique courbe est striée horizontalement.

Les faces de l'isoscéloèdre portent des systèmes de stries très nettes, bien rectilignes, dont il sera parlé plus loin.

* * *

Le second échantillon, n° 59, contient deux grands cristaux, ayant de 4 à 5 centimètres de hauteur, formés chacun par l'assemblage à axes parallèles d'individus semblables entre eux. Leur couleur est différente de celle du cristal n° 58 : incolores vers la pointe, ils sont d'un gris presque noir à la base. Ces cristaux sont entourés de gros cubes de fluorine jaune et de petits cubes de fluorine incolore ou violette.

Leur terminaison se compose essentiellement : du rhomboèdre premier obtus, $b^1 = 102$, à faces arrondies, striées suivant les plans de symétrie et coupées par le clivage parallèlement à ces stries, d'un petit biseau dont l'inclinaison des traces sur L indique le scalénoèdre d^2 et enfin d'une suite de légers dépôts bordant tout le contour formé par les six arêtes d'intersection des faces b^1 avec les faces L.

Biseau sur les arêtes culminantes latérales. — Tous les cristaux de cet échantillon portent sur six arêtes culminantes des

biseaux; contrairement à ce qui arrive pour les cristaux de Gotland, et en général pour ceux de Rhisnes, ces biseaux affectent les arêtes culminantes latérales B, c'est-à-dire les arêtes sur lesquelles ne s'appuie pas le clivage. Nous avons trouvé à Rhisnes des modifications analogues, rares et toujours assez mal développées (*); il en est de même dans les cristaux d'Écosse : les faces des biseaux, assez réfléchissantes, donnent des images multiples; j'ai obtenu pour l'angle du biseau

$$38°22' — 37°47' — 37°.$$

C'est la même forme que j'ai rencontrée à Rhisnes avec un angle de 36°26'; on peut consulter mon mémoire, pages 215 à 218, pour les essais de simplification et pour la discussion qui m'a amené à adopter pour cette forme la notation

$$l = 24.8.5 = d^{1/37}d^{1/43}b^{1/35} = B^4_L,$$

qui correspond à un angle de 37°7'.

La forme l est l'inverse de la forme connue $z = b^4_L$ que j'ai trouvée à Rhisnes formant biseau sur les arêtes culminantes antérieures b. Dans un petit cristal incolore, ayant environ 1 millimètre de hauteur, isolé sur la fluorine, j'ai pu obtenir d'assez bonnes mesures indiquant une forme voisine de la précédente; on a obtenu pour l'angle qu'une face s du biseau fait avec L adjacente,

$$sL = 9° — 8°37' — 8°26' — 8°52' = 8°44'.$$

Or, pour la face l cet angle est de 10°30'; l'incidence obtenue correspond à

$$s = 44.16.9 = d^{1/7}d^{1/23}b^{1/21} = B^5_L,$$

avec

$$sL = 8°46'.$$

Il est probable que les images multiples données par presque tous les biseaux indiquent la coexistence des deux formes.

(*) *Loc. cit.*, p. 215 et fig. 15, pl. VI.

Calcite de Gotland (Suède).

Isoscéloèdres n'ayant que de 5 à 6 millimètres de hauteur; ils paraissent teintés en brun rougeâtre, mais cette coloration est due à une patine superficielle très mince qui n'altère pas le pouvoir réfléchissant des faces. Les images données par celles-ci ne sont pas toutes également nettes; dans les deux cristaux mesurés, je n'ai rencontré qu'une paire de faces donnant des images bien précises. Voici le tableau des mesures effectuées :

Cristal.	Angle sur p φ	Angle latéral ψ	Angle basique χ
N° 1	58°7′(0′, 0)	—	* 24°40′(0′, 0)
	58°5′(0′, 0)	—	24°41′(0′, 0)
	58°4′(0′, $\bar{2}$, $\bar{1}$, 1)	—	—
N° 2	58°36′(2′, $\bar{5}$, 4, 1)	58°45′(3′, $\bar{2}$, $\bar{1}$, 0)	24°51′(0′, 0)
	58°33′(3′, 0, $\bar{1}$, $\bar{2}$)	58°45′ 0′, 0, 0, 2)	24°51′(0′, $\bar{1}$)
	58°36′(3′, $\bar{1}$, $\bar{4}$, 3)	58°45′(0′, 0, $\bar{2}$, 2)	—

On voit que les angles diffèrent assez bien d'un cristal à l'autre; c'est pour m'assurer de ce fait que j'ai exécuté une série de mesures en déplaçant chaque fois le cristal. On peut aussi observer que les angles du cristal n° 2 ne satisfont pas bien exactement à la relation

$$\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\psi}{2} = \cos\frac{\chi}{2}$$

qui se passe entre les angles dièdres d'un scalénoèdre quelconque; si, par exemple, pour obtenir un résultat aussi peu divergent que possible, on part de

$$\varphi = 58°35', \quad \chi = 24°51',$$

et que l'on calcule ψ par la formule ci-dessus, on arrive à

$$\psi = 58°19'46'' \text{ au lieu de } 58°45'$$

donné par la mesure.

Si $21l$ est la notation de l'isoscéloèdre, en partant de

$$\chi = 24°40'30'',$$

on obtient

$$l = 0{,}37371 = \frac{3}{8};$$

c'est donc encore l'isoscéloèdre de Rhisnes : 16.8.3.

Ces cristaux se terminent par les faces p du rhomboèdre primitif, toujours scabreuses et recouvertes par un commencement de dépôt plus récent, dans lequel on aperçoit des faces b^1 néogènes; la matière de seconde formation se développe quelquefois en un petit cristal incolore à faces courbes orienté comme l'isoscéloèdre sur lequel il a pris naissance.

Biseau sur les arêtes culminantes antérieures. — J'ai décrit dans les cristaux de Rhisnes une série de formes, dont quelques-unes très complexes, formant biseau sur les arêtes b de l'isoscéloèdre (*). Dans l'échantillon de Gotland que je possède, plusieurs cristaux sont modifiés de la sorte; dans l'un d'eux (n° 1), j'ai mesuré pour les angles qu'une face du biseau fait avec les faces de l'isoscéloèdre, se coupant suivant l'arête qu'il modifie,

$$8°52'(6', \bar{3}, \bar{3}, \bar{1}),$$
$$49°14'(8', \bar{8}, 1, \bar{1}).$$

Ces angles correspondent nettement à la forme

$$S''' = 44.28.9 = d^{4/17}d^4b^{4/27} = b^5_L$$

trouvée aussi à Rhisnes (**), forme dont la face fait avec L un angle de 8°47'.

(*) *Loc. cit.*, pp. 179 à 205 et fig. 5, 6, 7 et 10, pl. VI.
(**) *Ibidem*, p. 194.

S''' est l'inverse de $s = 44.16.9$ des cristaux d'Écosse; les deux formes constituent des biseaux géométriquement identiques, la dernière sur les arêtes culminantes latérales, l'autre sur les arêtes culminantes antérieures de l'isoscéloèdre L. La notation de ces formes devient très simple lorsqu'on les rapporte aux arêtes de l'isoscéloèdre; ainsi, la forme de Gotland se construit comme il suit : sur les deux arêtes basiques de l'isoscéloèdre placées devant le spectateur on prendra, à partir de leur point de jonction, des segments respectivement égaux au cinquième de l'arête et à l'arête entière, et par la droite joignant les deux points ainsi obtenus on mènera un plan parallèle à l'arête culminante supérieure placée devant soi; en autres termes, en prenant pour axes les trois arêtes de l'isoscéloèdre dont il vient d'être parlé et pour paramètres leurs longueurs, le biseau de Gotland aurait pour notation 510.

Les faces S''' vont souvent en s'élargissant vers le haut et sont alors remplacées par les faces que j'ai désignées par c, c' et c'' dans les cristaux de Rhisnes (*).

Stries.

Comme les cristaux de Rhisnes (**), les isoscéloèdres de Kelleys et de Gotland portent sur leurs faces des réseaux de stries qu'il est difficile de déchiffrer sans mesures. Pour arriver à la détermination de leur orientation, j'ai d'abord calculé les angles que les traces, sur les faces de l'isoscéloèdre, de certains plans importants tels que b^1, p, e^1, font avec les arêtes culminantes de ce solide. La comparaison des angles mesurés au microscope avec les angles calculés permet de savoir quels sont les plans auxquels les stries sont parallèles.

J'ai trouvé que dans les cristaux de Gotland les plans de strie sont parallèles à b^1, comme à Rhisnes, mais que dans les cristaux d'Écosse les stries sont dirigées parallèlement aux plans de clivage.

(*) *Loc. cit.*, pp. 206 à 212 et fig. 7, pl. V.
(**) *Ibidem*, p.259.

* * *

Section de l'isoscéloèdre L *par le plan* b^1. — En prenant pour axes les arêtes culminantes de l'isoscéloèdre, et en appliquant les formules de transformation (*), on obtient

$$b^1 = \bar{1}\bar{1}2 \equiv 18.17.15.14,$$

c'est-à-dire que pour obtenir la section il faut prendre (fig. 1) (**)

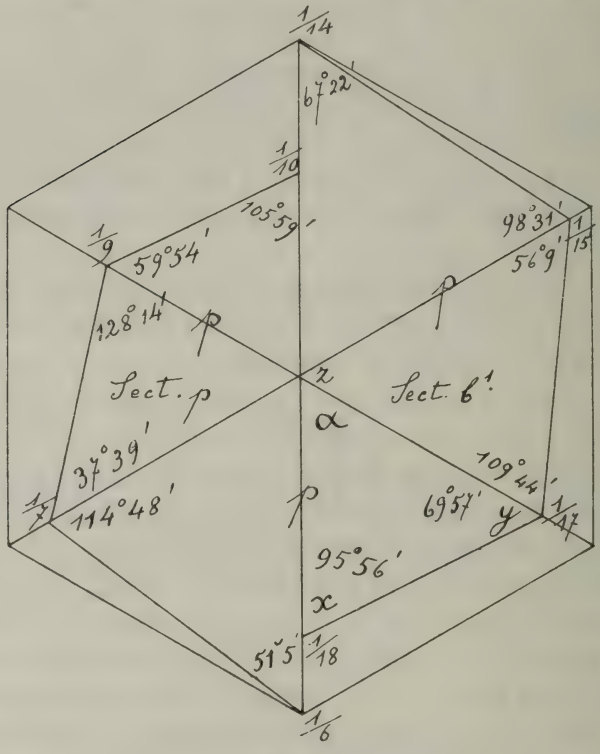


FIG 1.

$\frac{1}{18}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{15}$ et $\frac{1}{14}$ des arêtes culminantes à partir du sommet de l'isoscéloèdre et joindre entre eux les points ainsi obtenus.

(*) *Loc. cit.*, p. 170.

(**) Projection horizontale; on y a tracé à droite une demi-section b^1, à gauche une demi-section p.

On calcule alors aisément les angles x et y (*) que la trace de b^1 sur l'une des faces de l'isoscéloèdre fait avec les arêtes culminantes : on a, par exemple, dans le triangle $z \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{17}$,

$$\alpha = 14°6'40'',$$

$$\frac{x+y}{2} = 82°56'40'',$$

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{35} \cot \frac{\alpha}{2}.$$

On obtient ainsi :

SECTION b^1.

Triangles.	x	y
$\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{18}$	95°56'35''	69°56'45''
$\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{15}$	56° 9' 7''	109°44'13''
$\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{14}$	98°30'45''	67°22'35''

Section de l'isoscéloèdre L *par le clivage* p. — On a de même (fig. 1)

$$p = 111 \equiv 6.7.9.10;$$

puis

SECTION p.

Triangles.	x	y
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}$	51° 5'	114°48'20''
$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9}$	128°13'41''	37°39'39''
$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10}$	59°54'26''	105°58'54''

(*) Les angles sont comptés vers le sommet de l'isoscéloèdre, x étant celui qui se rapporte à l'arête culminante sur laquelle s'appuie le clivage.

Le cristal d'Islande, n° 58, a donné au microscope (fig. 2)

$$128° — 127° — 128° — 127°,5$$
$$60° — 60°,5 — 60°.$$

En consultant les deux tableaux et la figure 1, on voit que les plans de strie sont parallèles à p; le quadrillage est formé par des plans parallèles aux deux clivages latéraux, le clivage s'appuyant sur l'arête culminante située dans la face considérée

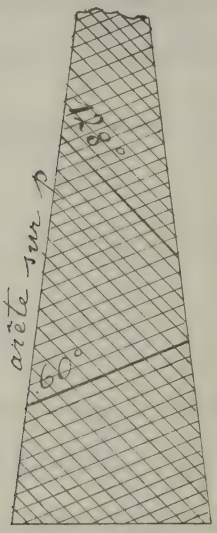


Fig. 2.

n'intervenant pas. On a aussi mesuré l'angle aigu de la maille parallélogramme dessinée par les deux systèmes de stries; on a trouvé 67°,5 (calculé : 68°19′).

* * *

Dans un cristal de Gotland à stries bien rectilignes, les

arêtes culminantes n'étant pas bien nettes, j'ai mesuré (fig. 3)

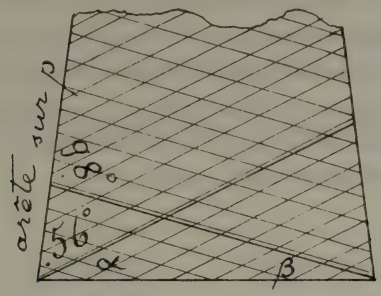


FIG. 3.

les angles α et β que les stries faisaient avec l'arête basique de l'isoscéloèdre.

J'ai obtenu

$$\alpha = 26°,5 — 26°,5$$
$$\beta = 15° — 15° — 16°;$$

on en déduit, pour les angles faits par les stries avec l'arête culminante sur p,

$$56°27' \text{ et } 98°17'.$$

En consultant les tableaux et la figure 1, on voit qu'ici les résultats se rapportent à deux plans b^1.

NOTE.

En examinant les mesures données à la page 7 pour la calcite de Gotland, on pourrait se demander s'il ne serait pas possible de trouver une autre notation presque aussi simple que $2.1.\frac{3}{8}$ pour représenter les résultats obtenus, en autres termes si la valeur de l est bien celle que nous avons adoptée, ou bien si elle ne reste plus ou moins indéterminée à cause de la variation assez notable constatée dans les angles. Pour répondre à cette

question, j'ai calculé les différentes valeurs de l en prenant pour point de départ, successivement, toutes les incidences obtenues par la mesure, développé les résultats en fraction continue et formé les réduites à termes abordables; en prenant ces différentes réduites pour valeurs de l, j'ai alors calculé l'angle qui n'a pas servi de départ; la comparaison du résultat du calcul à celui obtenu par la mesure permet de juger de la probabilité de la valeur de l essayée :

Premier cristal. $\varphi = 58°5'20''$; $l = 0{,}420874 = \cdots \frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{8}{19}, \cdots$

Second cristal.

$\varphi = 58°35'$; $l = 0{,}360039 = \cdots \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{9}{25}, \cdots$

$\psi = 58°45'$; $l = 0{,}337470 = \cdots \frac{1}{3}, \frac{27}{80}, \cdots$

$\chi = 24°51'$; $l = 0{,}376441 = \cdots \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{32}{85}, \cdots$

l	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{19}$	
χ calc :	28°9',5	27°24',5	27°41'	Mes : 24°40',5
l	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	
χ calc :	24°2'	22°4',5	24°45',5	Mes : 24°51'

On voit que la seule notation, pour laquelle on pourrait avoir un doute, correspondant à $l = \frac{4}{11}$, est

$$22.11.4 = d^{1/4}d^{1/37}b^{1/20};$$

mais, d'abord, elle est plus complexe que

$$16.8.3 = d^4 d^{1/2} b^{4/7},$$

et ensuite l'écart est plus grand que pour $l = \frac{3}{8}$:

$l = \frac{3}{8}$	Calculé.	Mesuré.
φ	58°28′	58° 5′,5 — 58° 35′
ψ	58°28′	58°45′
χ	24°45′,5	24°40′,5 — 24°51′

On comprend facilement pourquoi la détermination d'un isoscéloèdre aigu par la mesure de son angle dièdre culminant φ conduit à une incertitude : lorsque le segment $\frac{c}{l}$ que la face coupe sur l'axe vertical varie, par exemple, de $\frac{8}{3}c$ jusqu'à ∞, φ ne varie que de 58°28′ à 60°, en tout 1°32′ d'amplitude, de sorte qu'une légère altération de φ influencera notablement la valeur de $\frac{c}{l}$; ce procédé de mesure, qui serait d'une grande sensibilité pour un cristal idéal, devient inapplicable pour les cristaux réels, l'excès de sensibilité conduisant ici à une incertitude. Au contraire, dans les mêmes conditions, l'angle basique χ varie de 24°45′,5 à 0°; une légère altération de cet angle laissera toujours visible la vraie notation, sans la masquer.

RECHERCHES

SUR

LES SYSTÈMES DE CONIQUES DE L'ESPACE

PAR

Lucien GODEAUX

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

AVANT-PROPOS

L'étude des systèmes de coniques de l'espace se présente comme une généralisation de la Géométrie Réglée. Le premier problème qui se pose est celui de déterminer les différents types de congruences linéaires de coniques, problème qui est en quelque sorte l'extension de celui que Kümmer a résolu dans un mémoire classique (*). Ce problème avait déjà été abordé par M. Montesano, qui avait déterminé les types fondamentaux de congruences linéaires, et par M. Pieri, qui en avait déterminé les solutions quand la conique s'appuie en deux points sur une autre conique. Moi-même, je m'étais occupé de ce problème et l'avais ramené à un problème de géométrie plane en m'inspirant des recherches de M. Stuyvaert sur les congruences linéaires de cubiques gauches. Dans ce nouveau travail, je suis parvenu à déterminer toutes les congruences linéaires de coniques dont les courbes ou s'appuient en six points sur une seule courbe, ou s'appuient en quatre points sur une courbe et en deux points sur une seconde courbe, ou enfin passent par un point fixe et s'appuient en quatre points sur une courbe. Les congruences que j'ai rencontrées avaient du reste déjà été signalées par M. Montesano. Les autres cas qui peuvent se présenter (congruences dont les coniques s'ap-

(*) *Ueber die algebraischen Strahlensystem.* (MONATSBERICHTE DER KÖNG. AKAD. Berlin, 1866.)

puient en trois points sur deux courbes, etc.) pourront se traiter de la même façon que les premiers. De plus, la méthode employée pourra être étendue à la détermination des congruences linéaires de courbes planes d'ordre quelconque, comme le lecteur s'en rendra facilement compte.

Résumons rapidement notre Mémoire : Un premier chapitre traite des recherches antérieures sur les systèmes de coniques de l'espace. Nous résumons les recherches de géométrie énumérative dans un premier paragraphe, les recherches sur les congruences et les complexes de coniques dans un second. Nous avons donné les formules établies par M. Severi, exprimant les conditions d'appui des coniques sur des courbes gauches : elles pourront servir à vérifier nos résultats.

Dans un second chapitre, je reprends une représentation analytique de la conique dont je m'étais déjà occupé antérieurement, puis je définis la géométrie de la conique dans l'espace au point de vue moderne.

Enfin, le troisième chapitre contient les recherches sur les congruences linéaires de coniques dont j'ai parlé au début de cet avant-propos.

Je ne puis terminer sans exprimer mes vifs remerciements à mon Maître, M. J. Neuberg, qui a bien voulu présenter ce travail à la Société royale des Sciences.

Liége, 26 avril 1911.

RECHERCHES

SUR

LES SYSTÈMES DE CONIQUES DE L'ESPACE (*)

CHAPITRE PREMIER

Aperçu des recherches antérieures.

§ 1. — *Les recherches de géométrie énumérative.*

1. Après avoir établi la théorie des systèmes de coniques satisfaisant à quatre conditions dans un plan, Chasles voulut construire une théorie analogue relative aux quadriques de l'espace. Les coniques de l'espace s'introduisirent dans cette théorie comme dégénérescences des quadriques, et c'est ce qui amena Chasles à s'occuper d'abord des systèmes de coniques de l'espace.

Huit conditions sont nécessaires pour déterminer une conique dans l'espace : trois de ces conditions pour fixer le plan de la conique, les cinq dernières pour fixer la conique dans son plan. Chasles (5) (**) a considéré les systèmes de coni-

(*) Travail présenté à l'Université de Liége comme thèse de doctorat (juillet 1911).

(**) Les nombres placés entre parenthèses renvoient à la liste bibliographique à la fin du chapitre.

ques satisfaisant à sept conditions (systèmes simplement infinis) et il a soupçonné le théorème suivant :

Etant donné un système de coniques Σ, simplement infini, désignons par μ, ν, ρ respectivement le nombre de coniques de Σ dont le plan passe par un point arbitraire, le nombre de coniques de Σ s'appuyant sur une droite quelconque et enfin le nombre de coniques de Σ touchant un plan arbitraire.

Le nombre des coniques de Σ *satisfaisant à une huitième condition indépendante, sera égal à*

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho,$$

α, β, γ *étant des nombres qui dépendent uniquement de la huitième condition.*

Ce théorème fut démontré rigoureusement, sous quelques conditions restrictives, par Halphen (18) quelques années plus tard, et ce géomètre le généralisa de la manière suivante :

Soient Σ, Σ′ deux systèmes de coniques respectivement n fois ($n < 8$) et $8 - n$ fois infinis. Supposons Σ et Σ′ indépendants. *Le nombre de coniques appartenant à la fois à* Σ *et à* Σ′ *sera égal à un polynome de degré* $8 - n$ *en* μ, ν, ρ *dont les coefficients seront des nombres dépendants uniquement de* Σ′ *et où l'on remplacera chaque expression de la forme*

$$\mu^i \nu^k \rho^{8-n-i-k} \qquad (i \leqslant 3, 8 - n - i - k \geqslant 0)$$

par le nombre de coniques de Σ *dont les plans passent par* i *points, qui s'appuient sur* k *droites et qui touchent* $8 - n - i - k$ *plans.*

Rappelons brièvement le calcul symbolique utilisé par M. H. Schubert (30) dans ses recherches de géométrie énumérative, en nous limitant au cas où l'élément envisagé est la conique.

Toute condition à laquelle une conique de l'espace peut être assujettie est représentée par un symbole (lettre) ; le produit de deux symboles indique que l'on considère simultanément les conditions qu'ils représentent. Une condition est de dimen-

sion n quand il y a ∞^{8-n} coniques satisfaisant à cette condition ($8 \geqslant n$).

Considérons un système de coniques, ∞^{8-n}, Σ, et une condition A de dimension n. Il y aura un nombre fini de coniques de Σ assujetties à la condition A ; ce nombre sera encore représenté par le symbole de la condition.

Si nous fixons l'attention sur un certain nombre de conditions A_1, A_2, ... A_k de dimensions $\leq n$ et que, quel que soit le système Σ de dimension $8 - n$, on a toujours l'équation

$$F(A_1, A_2, ..., A_k) = 0,$$

on dit que l'équation lie les symboles envisagés. On remarquera que chaque terme de cette équation représente une condition de dimension n, produit de quelques-unes des conditions A_1, A_2, ..., A_k.

D'après ces conventions, le théorème de Halphen donne pour chaque condition A de dimension n

$$\alpha A = f(\mu, \nu, \rho),$$

où α est un nombre et $f(\mu, \nu, \rho)$ un polynome homogène de degré n.

Cela étant posé, adoptons les notations suivantes :

μ exprime que le plan d'une conique doit passer par un point ;

ν exprime qu'une conique doit s'appuyer sur une droite ;

ρ exprime qu'une conique doit toucher un plan ;

δ exprime qu'une conique dégénère en deux droites ;

η exprime qu'une conique (enveloppe de droites) dégénère en un segment de droite double ;

ρ' exprime qu'une tangente à une conique passe par un point ;

P exprime qu'une conique doit passer par un point ;

t exprime qu'une tangente à une conique doit faire partie d'un faisceau de rayons ;

T exprime qu'une conique doit toucher une droite.

La condition T est de dimension trois, les conditions P et t sont de dimension deux, les autres sont de dimension un.

M. Schubert (30) donne les formules suivantes :

$$\begin{aligned} P &= \mu\nu - 2\mu^2, \\ \rho' &= 2\mu, \\ t &= \mu\rho, \\ 2\nu &= \rho + 2\mu + \eta, \\ 2\rho &= \nu + \delta, \\ T &= \mu^2\rho - 2\mu^3. \end{aligned}$$

Signalons encore une formule établie plus tard par M. Schubert (31) :

$$2\nu^3 - 2\nu^2\rho + 3\nu\rho^2 - 2\rho^3 - 6\mu\nu^2 + 4\mu\rho\nu + 12\mu^2\nu - 8\mu^2\rho = 0.$$

L'exposition donnée par M. Schubert (30) est basée sur le principe de correspondance et sur le principe de la conservation du nombre.

Le théorème de Halphen ramène la détermination du nombre de coniques satisfaisant à huit conditions déterminées au calcul des nombres

$$\mu^i\nu^j\rho^k. \qquad (i + j + k = 8).$$

On a pour ces nombres les valeurs :

$\mu^3\nu^5 = 1,$	$\mu^2\nu^6 = 8,$	$\mu\nu^7 = 34,$	$\nu^8 = 92,$
$\mu^3\nu^4\rho = 2,$	$\mu^2\nu^5\rho = 14,$	$\mu\nu^6\rho = 52,$	$\nu^7\rho = 116,$
$\mu^3\nu^3\rho^2 = 4,$	$\mu^2\nu^4\rho^2 = 24,$	$\mu\nu^5\rho^2 = 76,$	$\nu^6\rho^2 = 128,$
$\mu^3\nu^2\rho^3 = 4,$	$\mu^2\nu^3\rho^3 = 24,$	$\mu\nu^4\rho^3 = 72,$	$\nu^5\rho^3 = 104,$
$\mu^3\nu\rho^4 = 2,$	$\mu^2\nu^2\rho^4 = 16,$	$\mu\nu^3\rho^4 = 48,$	$\nu^4\rho^4 = 64,$
$\mu^3\rho^5 = 1,$	$\mu^2\nu\rho^5 = 8,$	$\mu\nu^2\rho^5 = 24,$	$\nu^3\rho^5 = 32,$
	$\mu^2\rho^6 = 4,$	$\mu\nu\rho^6 = 12,$	$\nu^2\rho^6 = 16,$
		$\mu\rho^7 = 6,$	$\nu\rho^7 = 8,$
			$\rho^8 = 4.$

La table précédente a été donnée par M. Schubert (30), quelques-uns des nombres qui y figurent étaient déjà connus. Plusieurs avaient même été calculés par les procédés de la géométrie analytique par MM. Lüroth (22 et 23) et Hierholzer (19).

Récemment, M. J. de Vries (8), en se basant sur le principe de la conservation du nombre, a calculé de nouveau le nombre ν^8. La même méthode a servi à une élève de M. J. de Vries, M^lle^ Dalhuisen (7), pour reconstruire toute la table précédente.

Signalons enfin que M. Schubert a calculé les nombres de coniques d'un espace linéaire à n dimensions dont les plans passent par des points, qui s'appuient sur des espaces linéaires et touchent d'autres espaces linéaires en nombre suffisant (32 et 33).

2. A part quelques résultats obtenus incidemment, on ne s'était pas encore occupé, avant 1900, de déterminer par la géométrie énumérative les nombres de coniques satisfaisant à huit conditions parmi lesquelles se trouvent des appuis sur des courbes données ou des contacts avec des courbes données. A cette époque, M. Berzolari (1) s'est proposé de déterminer le nombre de coniques passant par i points, s'appuyant en j points sur une ou plusieurs courbes et touchant k plans :

$$2i + j + k = 8, \qquad i \leqslant 3.$$

Il résolut le problème dans un grand nombre de cas au moyen du principe de la conservation du nombre, mais sans donner de démonstrations. Ses recherches furent étendues à l'espace à n dimensions par un de ses élèves, M. Crepas (6).

M. Severi a abordé simultanément le même problème que M. Berzolari et il l'a résolu complètement.

Désignons par $\alpha_k\,(n, r)$ la condition pour une conique de s'appuyer en k points sur une courbe gauche d'ordre n et de rang r, et admettons que cette condition ne dépend que de

l'ordre et du rang de la courbe. Dans un premier mémoire (35), M. Severi donne les formules suivantes :

$$\alpha_2(n,r) = \binom{n}{2}\nu^2 - \frac{1}{2}r\mu\nu + (n+r)\mu^2,$$

$$\alpha_3(n,r) = \binom{n}{3}\nu^3 - \frac{1}{2}r(n-2)\mu\nu^2 + \{n(n-1) + r(n-3)\}\mu^2\nu + 2r\mu^3,$$

$$\alpha_4(n,r) = \binom{n}{4}\nu^4 + nr - \frac{1}{2}r\binom{n}{2} - \frac{3}{2}r\left\{\mu\nu^3 + \left\{3\binom{n}{3} + r\binom{n}{2} - 3rn + \frac{1}{4}\binom{r}{2} + \frac{39}{8}r\right\}\mu^2\nu^2 + \left\{\frac{3}{2}rn - \binom{r}{2} - 3r\right\}\mu^3\nu,$$

$$\alpha_5(n,r) = \binom{n}{5}\nu^5 + \left\{r\binom{n}{2} - \frac{1}{2}r\binom{n}{3} - \frac{3}{2}rn + 2r\right\}\mu\nu^4 + \left\{4\binom{n}{4} - \binom{r}{2} - 3r\binom{n}{2} + r\binom{n}{3} + \frac{1}{4}n\binom{r}{2} + \frac{39}{8}rn - n - \frac{11}{2}r\right\}\mu^2\nu^3 + \left\{5\binom{r}{2} + r\binom{n}{2} - n\binom{r}{2} - 2nr + 6n - \frac{9}{2}r\right\}\mu^3\nu^2,$$

$$\alpha_6(n,r) = \binom{n}{6}\nu^6 + \left\{r\binom{n}{3} - \frac{1}{2}r\binom{n}{4} - \frac{3}{2}r\binom{n}{2} + 2rn - \frac{5}{2}r\right\}\mu\nu^5 + \left\{5\binom{n}{5} - 2\binom{n}{2} + \frac{5}{2}\binom{r}{2} + r\binom{n}{4} - 3r\binom{n}{3} + \frac{1}{4}\binom{n}{2}\binom{r}{2} + \frac{39}{8}r\binom{n}{2} - n\binom{r}{2} - \frac{11}{2}rn + 3n + \frac{15}{4}r\right\}\mu^2\nu^4 + \left\{12\binom{n}{2} - \frac{111}{8}\binom{r}{2} - \frac{1}{8}\binom{r}{3} + \frac{1}{2}r\binom{n}{3} - r\binom{n}{2} - \binom{n}{2}\binom{r}{2} - 6nr + 5n\binom{r}{2} - 20n + \frac{471}{16}r\right\}\mu^3\nu^3,$$

$$\alpha_7(n,r) = \binom{n}{7}\nu^7 + \left\{ r\binom{n}{4} - \frac{1}{2}r\binom{n}{5} - \frac{3}{2}r\binom{n}{3} + 2r\binom{n}{2} \right.$$
$$- \frac{5}{2}rn + 3r\left\{ \mu\nu^6 + \right\} 6\binom{n}{6} - 3\binom{n}{3} + 6\binom{n}{2}$$
$$- 5\binom{r}{2} + r\binom{n}{5} - 3r\binom{n}{4} + \frac{1}{4}\binom{n}{3}\binom{r}{2} + \frac{39}{8}r\binom{n}{3}$$
$$- \binom{n}{2}\binom{r}{2} - \frac{11}{2}r\binom{n}{2} + \frac{5}{2}n\binom{r}{2} + \frac{15}{4}rn - 6n$$
$$+ \frac{3}{2}r\left\{ \mu^2\nu^5 + \right\} 18\binom{n}{3} - 40\binom{n}{2} + \frac{113}{4}\binom{r}{2} + \frac{3}{4}\binom{r}{3}$$
$$+ \frac{511}{16}rn - \binom{n}{3}\binom{r}{2} - \frac{15}{2}r\binom{n}{2} + 5\binom{n}{2}\binom{r}{2}$$
$$- \frac{111}{8}n\binom{r}{2} - \frac{1}{8}n\binom{r}{3} + 40n - \frac{633}{8}r\left\{ \mu^3\nu^4, \right.$$

$$\alpha_8(n,r) = 92\binom{n}{8} + 56\binom{n}{7} - 8\binom{n}{4} + 12\binom{n}{3} - 16\binom{n}{2}$$
$$- 9r\binom{n}{6} + \frac{19}{2}r\binom{n}{5} - 11r\binom{n}{4} + 15r\binom{n}{3}$$
$$- \frac{329}{16}r\binom{n}{2} + \frac{239}{8}rn - \frac{861}{16}r + \binom{r}{2}\binom{n}{4}$$
$$- 3\binom{r}{2}\binom{n}{3} + \frac{49}{8}\binom{r}{2}\binom{n}{2} - \frac{47}{4}\binom{r}{2}n + \frac{189}{8}\binom{r}{2}$$
$$- \frac{1}{8}\binom{r}{3}\binom{n}{2} + \frac{3}{4}\binom{r}{3}n - \frac{21}{8}\binom{r}{3} + 20n.$$

Une autre expression de $\alpha_8(n, r)$, en fonction du genre p de la courbe, avait été communiquée par M. Tanturri à M. Severi (36) :

$$\alpha_8(n, 2n+2p-2) = 92\binom{n-3}{8} + 206\binom{n-3}{7}$$
$$+ 150\binom{n-3}{6} + 35\binom{n-3}{5} - 3\binom{n-3}{5}(n-3)p$$
$$+ \binom{n-5}{3}(n-3)\binom{p}{2} - \binom{n-6}{2}\binom{p}{3}.$$

Dénotons maintenant par $\beta_{ik\ldots l}(n, r)$ la condition pour qu'une conique ait avec une courbe d'ordre n et de rang r un contact d'indice $i-1$, un contact d'indice $k-1$, ..., un contact d'indice $l-1$. La seconde note de M. Severi (36) est relative à l'évaluation de cette condition. On a

$$\beta_2(n,r) = (\mu^2\rho - 2\mu^3)n + \left(\frac{1}{2}\rho\mu\nu - \mu^2\rho\right)r,$$

$$\beta_{21}(n,r) = \frac{1}{2}r(n-2)\rho\mu\nu^2 + \left\{2\binom{n}{2} - (n-)r\right\}\rho\mu^2\nu + 4\left\{r - \binom{n}{2}\right\}\mu^3\nu + 2r\mu^3\rho,$$

$$\beta_{211}(n,r) = \frac{1}{2}\binom{n-2}{2}r\rho\mu\nu^3 + 3\binom{n}{3} - 3n - r\binom{n}{2} + rn - \frac{1}{2}\binom{r}{2} + \frac{9}{4}r\left\{\rho\mu^2\nu^2 + \left\{2\binom{r}{2} - 18r + 2rn + 12n\right\}\rho\mu^3\nu + \left\{6n - 6\binom{n}{3} + 4nr - 15r\right\}\mu^2\nu^2,$$

$$\beta_{2111}(n,r) = \frac{1}{2}r\binom{n-2}{3}\rho\mu\nu^4 + \left\{4\binom{n}{4} - r\binom{n}{3} + r\binom{n}{2} + \frac{9}{4}rn - \frac{1}{2}n\binom{r}{2} - 6\binom{n}{2} + 8n + 2\binom{r}{2} - 11r\right\}\rho\mu^2\nu^3 + \left\{24\binom{n}{2} - 36n + 2r\binom{n}{2} - 18rn + 60r + 2n\binom{r}{2} - 8\binom{r}{2}\right\}\rho\mu^3\nu^2 + \left\{12\binom{n}{2} - 8\binom{n}{4} - 16n + 4r\binom{n}{2} - 15rn + 36r\right\}\mu^3\nu^3,$$

$$\beta_{21111}(n,r) = \frac{1}{2}r\binom{n-2}{4}\rho\mu\nu^5 + \left\{5\binom{n}{5} - 9\binom{n}{3} + 16\binom{n}{2} - 15n - r\binom{n}{4} + r\binom{n}{3} + \frac{9}{4}r\binom{n}{2} - \frac{1}{2}\binom{r}{2}\binom{n}{2}\right.$$

$$+ 2n\binom{r}{2} - 11rn - 5\binom{r}{2} + \frac{55}{2}r\Big\}\rho\mu^2\nu^4 + \Big\{36\binom{n}{3}$$
$$- 72\binom{n}{2} + 62n + 2r\binom{n}{3} - 18r\binom{n}{2} + \frac{123}{2}rn$$
$$+ 2\binom{r}{2}\binom{n}{2} - 8n\binom{r}{2} + \frac{3}{8}\binom{r}{3} + \frac{133}{8}\binom{r}{2}$$
$$- \frac{2117}{16}r\Big\}\rho\mu^3\nu^3 + \Big\{18\binom{n}{3} - 10\binom{n}{5} - 32\binom{n}{2}$$
$$+ 26n + 4r\binom{n}{3} - 15r\binom{n}{2} + 36rn - 67r\Big\}\mu^3\nu^4,$$

$$\beta_{2111}(n,r) = 72\binom{n}{6} - 48\binom{n}{4} + 72\binom{n}{3} - 120\binom{n}{2} + 168n$$
$$- \frac{9}{2}\binom{r}{3} + \frac{201}{2}\binom{r}{2} - \frac{1449}{4}r + \frac{3}{4}\binom{r}{3}n - 3\binom{r}{2}\binom{n}{3}$$
$$+ 12\binom{r}{2}\binom{n}{2} - \frac{147}{4}\binom{r}{2}n + 12r\binom{n}{5} - 30r\binom{n}{4}$$
$$+ \frac{117}{2}r\binom{n}{3} - 96r\binom{n}{2} + \frac{1347}{8}rn,$$

$$\beta_{22}(n,r) = \rho^2\mu^2\nu^2\Big\{\frac{1}{4}\binom{r}{2} - \frac{9}{8}r + n\Big\} + \rho^2\mu^3\nu\Big\{\frac{1}{2}rn$$
$$- \binom{r}{2} + 3r - 4n\Big\},$$

$$\beta_{221}(n,r) = \rho^2\mu^2\nu^3\Big\{\frac{1}{4}n\binom{r}{2} - \binom{r}{2} - \frac{9}{8}rn + 2\binom{n}{2} - 3n + \frac{9}{2}r\Big\}$$
$$+ \rho^2\mu^3\nu^2\Big\{3\binom{r}{2} - n\binom{r}{2} + r\binom{n}{2} - rn - 8\binom{n}{2}$$
$$+ 3rn + 6n = \frac{15}{2}r\Big\},$$

$$\beta_{2211}(n,r) = 24\binom{n}{3} - 96\binom{n}{2} + 192n + 2\binom{r}{2}\binom{n}{2}$$
$$- 23r\binom{n}{2} + 76rn - 12n\binom{r}{2} + 6r\binom{n}{3}$$
$$+ \frac{107}{2}\binom{r}{2} - \frac{3}{2}\binom{r}{3} - \frac{1107}{4}r.$$

En dehors de ces formules très générales de M. Severi, un autre théorème général du même genre a été obtenu par M. Stuyvaert (39 et 40) en s'appuyant sur un théorème classique de M. Le Paige donnant le nombre de groupes communs à deux involutions unicursales placées sur le même support.

Étant donné, dans l'espace, un ensemble de lignes unicursales d'ordres respectifs n, n' ..., *de manière que l'on ait*

$$n + n' + \ldots = 6,$$

et si toutes ces lignes sont deux à deux sans points communs, les plans qui les rencontrent en six points d'une conique enveloppent une surface dont la classe est égale à

$$\nu = 8 - (n - i) - (n' - i) \ldots$$

En particulier, si l'on a deux lignes, une conique et une biquadratique gauche de seconde espèce, on a un résultat dû à M. R. Sturm (37).

M. Stuyvaert (39, 41) a montré comment la surélimination pouvait s'appliquer au problème qui nous occupe.

Il nous reste à signaler un dernier résultat dû à M. Bottasso (4). Si l'on représente par $\gamma_2(n)$ la condition pour qu'une conique touche deux fois une surface générale d'ordre n, on a

$$\gamma_2(n) = \frac{1}{2} n(n-1)\{8(2n-3)\mu^2 - 2(4n-7)\mu\nu + 2(n^2-n-1)\nu^2 + (4n-9)\nu\rho + 2\rho^2\}.$$

Avant de terminer ce paragraphe, signalons une belle étude de M. Schuh (34) sur les méthodes employées en géométrie énumérative, et contenant de nombreux détails sur les recherches dont il a été question plus haut.

§ 2. — *Les recherches de géométrie analytico-projective.*

3. Par analogie avec la géométrie réglée, appelons *congruence*, un système de coniques de l'espace dépendant de deux paramètres. L'*ordre* d'une congruence de coniques sera égal au nombre de coniques de la congruence passant par un point arbitraire, la *classe* sera le nombre de coniques s'appuyant en deux points sur une droite quelconque.

En 1892, M. Montesano (24) a considéré la congruence de coniques engendrée par les intersections des éléments correspondants d'une gerbe de plans et d'un réseau de quadriques homographiques. Cette congruence, dont l'ordre et la classe sont égaux à l'unité, peut être considérée comme le lieu des intersections variables des surfaces cubiques d'un *réseau* dont les éléments ont en commun une courbe gauche du septième ordre et de genre cinq sur laquelle chaque conique s'appuie en six points.

Le problème qui s'est posé alors est celui de la détermination des différents types de congruences de coniques d'ordre un; M. Montesano (25) l'a abordé l'année suivante. Il commence par démontrer que les plans des coniques d'une congruence linéaire enveloppent une surface rationnelle, puis qu'une congruence linéaire de coniques peut toujours être considérée comme le lieu des intersections variables des surfaces d'un réseau et qu'il existe une infinité de ces réseaux. M. Montesano établit ensuite des relations entre les caractères de la congruence et des courbes sur lesquelles les coniques de la congruence s'appuient.

Vers la même époque, M. Pieri (29) s'était proposé de déterminer toutes les congruences linéaires de coniques qui s'appuient en deux points sur une conique et celles qui sont de classe deux. Pour résoudre le premier problème, M. Pieri rapporte projectivement les quadriques passant par une conique fixe de l'espace aux hyperplans d'un espace linéaire à quatre dimensions; le problème est alors ramené à la détermination des congruences linéaires de plans dans cet espace, problème

connu. M. Pieri ramène aussi le second problème à une propriété de l'espace à quatre dimensions, mais la résolution est incomplète, comme M. Montesano (26) l'a montré dans un mémoire publié en 1895.

Dans ce nouveau travail, M. Montesano remarque qu'une congruence linéaire de coniques est complètement déterminée lorsque l'on connaît soit un réseau de surfaces dont les faisceaux ont pour bases variables les coniques de la congruence, soit un faisceau de surfaces sur chacune desquelles se trouve un faisceau de coniques de la congruence. Les congruences sont classées d'après le type de l'involution qu'elles déterminent sur un plan quelconque de l'espace. Ces involutions ont été ramenées par des transformations birationnelles à trois types fondamentaux par M. Bertini et, plus tard, par M. Kantor (*), et M. Montesano détermine des congruences de coniques d'ordre un qui marquent sur un plan quelconque un de ces types. A la fin de son mémoire, M. Montesano démontre que :

Une congruence linéaire de coniques admet un faisceau générateur de surfaces rationnelles à sections planes rationnelles ou elliptiques, ou admet un réseau générateur de surfaces rationnelles à sections planes elliptiques.

M. Montesano en déduit qu'une congruence de coniques admet un réseau ou un faisceau générateur de surfaces d'ordre ≤ 8. Ensuite il déclare qu'il a examiné séparément toutes les transformations birationnelles involutives du plan possédant des courbes unies de genre un, et qu'il a cherché quand il pouvait y avoir une congruence linéaire de coniques, donnant une telle correspondance, mais M. Montesano ne donne aucune démonstration de ce dernier point.

S. Kantor (21) a démontré que toute congruence linéaire de coniques peut se ramener, par des transformations birationnelles, à une congruence ayant toutes ses courbes dans les plans d'un faisceau, ou toutes ses courbes dans les quadriques d'un réseau.

(*) Consulter : G. Castelnuovo, *Sulla razionalita delle involuzione piane.* (Math. Annalen, 1893, XLIV, pp. 125-155.)

M. Veneroni (42) a démontré que la seule congruence de coniques d'ordre et de classe un est la congruence étudiée par M. Montesano (24).

On sait que M. Stuyvaert (41) a ramené la détermination des congruences linéaires de cubiques gauches à celles des réseaux de degré (effectif) un de courbes planes rationnelles. Je suis arrivé au même résultat pour les congruences linéaires de coniques. D'abord, j'ai observé (12) que les équations

$$\begin{Vmatrix} a_x^2 & a_x^2 & \mathrm{A} \\ b_x^2 & b_x' & \mathrm{B} \end{Vmatrix} = 0,$$

ou encore les équations

$$\begin{Vmatrix} a_x^2 & a_x' & a_x'' \\ b_x & \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{Vmatrix} = 0,$$

a_x, b_x, ... étant des formes linéaires quaternaires et A, B des constantes, représentent respectivement une conique. J'ai étudié (15) les congruences linéaires des coniques les plus simples dont l'élément générateur peut être représenté ainsi; tous les types rencontrés l'avaient déjà été par M. Montesano (26).

Dans une petite note récente (16), j'ai démontré que toute congruence linéaire de coniques possède des points singuliers.

Quelques congruences de coniques dont l'ordre est supérieur à un ont été considérées. M. J. de Vries (9) a étudié la congruence lieu des coniques situées sur les surfaces cubiques d'un faisceau; cette congruence est d'ordre 27 et de classe 42. M. de Vries (10) a encore étudié la congruence d'ordre et de classe deux formée par les coniques intersections des éléments correspondants d'une quadrique enveloppe de plans et d'un réseau de quadriques homographiques.

Enfin, j'ai étudié une congruence particulière d'ordre deux et de classe un (13).

4. Appelons *complexe* de coniques, un ensemble triplement infini et algébrique de coniques de l'espace. L'ordre d'un complexe sera le nombre de coniques situées dans un plan arbi-

traire, la classe sera celle du cône enveloppé par les plans des coniques du complexe passant par un point.

On sait que le lieu des points de contact avec un plan des cubiques gauches passant par cinq points de l'espace est une conique. Lorsque l'on considère la gerbe formée par les cubiques gauches passant par cinq points fixes, on définit ainsi dans chaque plan une conique dont le lieu est un complexe d'ordre et de classe un qui a été étudié par M. G. Humbert (20).

Dans son grand ouvrage sur la géométrie réglée, M. R. Sturm (38) a considéré le complexe engendré par les coniques enveloppes des droites d'un complexe quadratique; ce complexe est d'ordre un et de classe deux.

M. Montesano (27) s'est occupé d'un complexe d'ordre un et de classe deux engendré de la manière suivante ; soient k_1, k_2, k_3, k_4 quatre complexes linéaires de droites; on considère tous les faisceaux de rayons tels que les droites de chacun de ces faisceaux appartenant aux quatre complexes k_1, k_2, k_3, k_4 ont un rapport anharmonique donné. Un plan de l'espace contient une infinité de pareils faisceaux et leurs sommets sont sur une conique qui engendre le complexe.

C'est dans ce travail que M. Montesano a défini l'ordre et la classe d'un complexe de coniques comme nous l'avons fait plus haut.

Un problème s'est alors posé : Quel est le type le plus général de complexe bilinéaire de coniques? Ce problème a été résolu par M. Montesano (28) (*) par ce théorème :

Le complexe bilinéaire de coniques le plus général peut être engendré par les intersections des plans de l'espace avec les quadriques correspondantes d'un système linéaire triplement infini rapporté projectivement à l'espace (lieu de plans).

Indépendamment de M. Montesano et avant la publication de son mémoire, j'avais démontré un théorème un peu moins

---

(*) Je cite ce mémoire d'après la Revue semestrielle des Publications mathématiques. Amsterdam, 1910, 1re livraison.

précis (11) et j'avais étudié avec quelques détails le complexe auquel M. Montesano est arrivé (14).

Dans un mémoire couronné par l'Académie royale de Belgique, M. Bordiga (3) s'est occupé d'un complexe d'ordre un et de classe quatre lié à une congruence de droites d'ordre quatre et de classe deux.

Récemment, je me suis occupé d'un complexe de coniques d'ordre un et de classe quatre (17) que j'obtiens en considérant tous les triangles ABC dont les côtés appartiennent respectivement à trois complexes linéaires de droites et dont deux sommets B, C se trouvent respectivement sur des droites de deux congruences réglées bilinéaires. Tout plan de l'espace contient ∞^1 de ces triangles et le troisième sommet A décrit la conique engendrant le complexe.

Signalons enfin une étude faite par M. Bordiga (2) d'un complexe de cercles d'ordre quatre.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE (*)

1. Berzolari (E.), Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche. (*Rend. del R. Istituto Lombardo*, 1900, (2), t. XXXIII, pp. 665-674, 809-821.)

2. Bordiga (G.), Di un complesso di cerchi del quarto ordine. (*Atti del R. Istituto Veneto*, 1903-1904, t. LXIII, pp. 733-748.)

3. Idem, Étude sur la correspondance quadratique. (*Mémoires in-4° de l'Acad. royale de Belgique* (Classe des sciences), 1907, t. II, pp. 1-88, ch. I.)

4. Bottasso (M.). Sopra le coniche bitangenti alle superficie algebriche. (*Annali di Matematica*, 1903, (3), t. VIII, pp. 233-243.)

(*) Dans les renvois aux publications périodiques, nous indiquons l'année, la série, en chiffres arabes placés entre parenthèses, le volume en chiffres romains et la pagination.

5. Chasles (M.) Systèmes de coniques qui satisfont à sept conditions dans l'espace. (*Comptes rendus*, 1865, t. LXI, pp. 389-396.)

6. Crepas (A.), Sulle coniche che secano e toccano delle curve in un iperspazio. (*Rend. del R. Istituto Lombardo*, 1903, (2), t. XXXVI, pp. 255-277, 284-403.)

7. Dalhuisen (A.), Over eenige aantallen van kegelsneden die an acht voorwaarden voldoen. (*Proefschrift*, Utrecht. 1905.)

8. De Vries (J.), The number of conics intersecting eight given right lines. (*Verslagen van de konink. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam*, 1901, pp. 181-184.)

9. Idem, The congruence of the conics situated on the cubic surfaces of a pencil. (*Id.*, 1904, pp. 264-266.)

10. Idem, A congruence of order two and class two formed by conics. (*Id.*, 1904, pp. 311-314.)

11 Godeaux (L.), Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques. (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique* (Classe des sciences), 1908, pp 597-601, 812-813; 1909, pp. 499-500.)

12. Idem, Sur la représentation analytique de la conique dans l'espace. (*Id.*, 1908, pp. 896-902.)

13. Idem, Sur une congruence (2, 1) de coniques. (*Mémoires de la Société des sciences du Hainaut*, 1908, (6), t. X, pp. 1-10.)

14. Idem, Sur un complexe bilinéaire de coniques. (*Nouv. Annales de Math.*, 1909, (4), t. IX, pp. 312-317.)

15. Idem, Sur quelques congruences linéaires de coniques. (*Archiv der Math. und Phys.*, 1910, (3), t. XVI, pp. 101-105.)

16. Idem, Sur l'existence des points singuliers dans les congruences linéaires de coniques. (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique* (Classe des sciences), 1910. pp. 184-186.)

17. Idem, Sur un complexe de coniques de caractéristiques un et quatre. (*Id.*, 1910, pp. 725-737.)

18. Halphen (M.), Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre. (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1873-1874, t. II, pp. 11-33.)

19. Hierholzer, Ueber kegelschnitte im Raume. (*Math. Annalen*, 1870, t. II, pp. 563-586.)

20. Humbert (G.), Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre. (*Journal de l'École polytechnique*, 1894, t. LXIV, pp. 123-150.)

21. Kantor (S.), Die Typen der linearen Complexe rationaler Curven im R_r. (*American Journal of Math.*, 1901, t. XXIII, pp. 1-28.)

22. Lüroth (J.), Ueber die Anzahl der kegelschnitte, welche acht Geraden im Raumen schneiden. (*Journal de Crelle*, 1868, t. LXVIII, pp. 185-190.)

23. Idem Eine Aufgabe über kegelschnitte im Raume. (*Math. Annalen*, 1870, t. III, pp. 124-133.)

24. Montesano (D.), Su di un sistema lineare di coniche dello spazio. (*Atti della R. Accad. di Torino*, 1892, t. XXVII, pp. 660-690.)

25. Idem, Su le congruenze lineari di coniche nello spazio. (*Rend. del R. Istituto Lombardo*. 1893, (2), t. XXVI, pp. 589-603.)

26. Idem, Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio. (*Rend. della R. Accad. di Napoli*, 1895, pp. 93-110, 155-181.)

27. Idem. Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette. (*Annali di Matematica*, 1898, (3), t. I, pp. 313-358.)

28. Idem, Su i complessi bilineari di coniche nello spazio. (*Atti del IV° Congresso dei Matematici*. Roma, 1908, II, pp. 231-233.)

29. Pieri (M.), Sopra alcune congruenze di coniche. (*Atti della R. Accad. di Torino*. 1893, XXVII, pp. 289-303.)

30. Schubert (H.), Beiträge zur abzählenden Geometrie. (*Math. Annalen*, 1876, X, pp. 1-116; 1878, XIII, pp. 429-539.)

31. Idem, Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung. (*Ibid.*, X, pp. 318-364.)

32. Idem., Mitteilungen aus der abzählenden Geometrie p — dimensionaler Raume eersten und zweiten Grades. (*Jahresbericht der D. Math. Verein.*, 1890-1891, I, pp. 48-49.)

33. Idem, Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades an n dimensionen. (*Math. Annalen*, 1894, XLV, pp. 153-206.)

34. Schuh (F.), Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen vlakke krommen. (*Academisch Proefschrift*, Amsterdam, 1905.)

35. Severi (F.), Ricerche sulle coniche toccanti delle curve gobbe. (*Atti della R. Accad. di Torino*, 1900, XXXV, pp. 774-541.)

36. Idem, Sopra le coniche che toccano e seccano una o piu curve gobbe. (*Ibid.*, 1900, XXXVI, pp. 74-93.)

37. Sturm (R.), Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du quatrième ordre et de la seconde espèce en quatre points d'un cercle. (*Annali di Matematica*, 1870, (2), IV, pp. 1-13.)

38. Idem, Die Gebilde eersten und zweiten grades der Liniengeometrie. Leipzig, Teubner, III, pp. 26-49.

39. Stuyvaert (M.), Sur les plans qui coupent en des points d'une conique un système de lignes de l'espace. (*Mém. in-8° de l'Académie royale de Belgique*, 1901, LXII.)

40. Idem, Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre. Thèse de doctorat spécial. Gand, Hoste, 1902, pp. 1-11.

41. Idem, Cinq études de géométrie analytique. Prix F. Deruyts, 1906. (*Mémoires de la Société des sciences de Liége*, 1907, (3), VII, pp. 78-80. Gand, Van Goethem.)

42. Veneroni (E.), Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe. (*Rend. del Circolo Matematico di Palermo*, 1902, XVI, pp. 209-229.)

CHAPITRE II.

La géométrie de la conique dans l'espace.

§ 1. — *La représentation analytique de la conique.*

5. Considérons six quadriques, linéairement indépendantes, sans point commun, et dont les équations sont respectivement

$$a1_x^2 = 0, \quad a2_x^2 = 0, \ldots, a6_x^2 = 0,$$

$ai (i = 1, 2, \ldots, 6)$ étant des symboles et a_x représentant une forme linéaire homogène à quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4.

Toute conique de l'espace peut être représentée par des équations de la forme

$$\lambda_1 a1_x^2 + \lambda_2 a2_x^2 + \ldots + \lambda_6 a6_x^2 = 0, \tag{1}$$

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0. \tag{2}$$

En effet, la seconde de ces équations représente le plan de la conique. D'autre part, par cinq points de l'espace passe une et une seule quadrique (1); en particulier, si ces cinq points sont choisis sur la conique, la quadrique déterminée contient la conique toute entière.

Ainsi, à une conique de l'espace correspond généralement

un seul système de valeurs des rapports $\frac{u_1}{u_4}, \frac{u_2}{u_4}, \frac{u_5}{u_4}, \frac{\lambda_1}{\lambda_6}, \frac{\lambda_2}{\lambda_6}, \ldots, \frac{\lambda_5}{\lambda_6}$, et inversement. Ces huit rapports sont en quelque sorte les coordonnées de la conique; nous allons voir qu'on exprime simplement par des relations entre ces rapports quelques conditions simples auxquelles on peut assujettir les coniques.

6. Exprimons en premier lieu qu'une conique, donnée par les équations (1) et (2), s'appuie en un point sur la droite qui joint deux points (y_1, y_2, y_3, y_4), (z_1, z_2, z_3, z_4). Les coordonnées du point d'appui sont de la forme

$$y_i + kz_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

donc on doit avoir

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i a i_y^2 + k \sum_{i=1}^{6} \lambda_i a i_y a i_z + k^2 \sum_{i=1}^{6} \lambda_i a i_z^2 = 0,$$
$$u_y + k u_x = 0.$$

En éliminant k, on trouve l'équation

$$\begin{vmatrix} \Sigma \lambda_i a i_y^2 & \Sigma \lambda_i a i_y a i_z & \Sigma \lambda_i a i_z^2 \\ u_y & u_z & 0 \\ 0 & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient donc une relation linéaire en λ et quadratique en u.

7. Recherchons maintenant l'expression de la condition pour une conique de toucher un plan

$$v_x = 0.$$

Il suffira d'exprimer que la droite située à l'intersection des plans

$$u_x = 0, \qquad v_x = 0$$

touche la quadrique (1). Pour que le plan

$$u_x + kv_x = 0$$

touche la quadrique (1), on doit avoir

$$\begin{vmatrix} u_1 + kv_1 & u_2 + kv_2 & u_3 + kv_3 & u_4 + kv_4 & 0 \\ \sum_{i=1}^{6} \lambda_i a i_{11} & \sum \lambda_i a i_{21} & \dots & \sum \lambda_i a i_{41} & u_1 + kv_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & u_2 + kv_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & u_3 + kv_3 \\ \sum \lambda_i a i_{14} & \dots & \dots & \sum \lambda_i a i_{44} & u_4 + kv_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$k^2 \begin{vmatrix} v_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & v_k \end{vmatrix}^{(*)} + 2k \begin{vmatrix} u_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & v_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & u_k \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux racines k de cette équation doivent être égales, donc la condition cherchée est

$$\begin{vmatrix} u_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & v_k \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} u_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & v_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & u_k \end{vmatrix} = 0.$$

8. Cherchons en dernier lieu quelle est la relation existant entre les λ et les u quand la conique dégénère en deux droites.

(*) Cette notation représente le discriminant de l'équation (1) bordé.

Cela arrive évidemment quand la quadrique (1) touche le plan (2); alors, on a

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \\ \sum_{i=1}^{6} \lambda_i a i_{11} & \sum \lambda_i a i_{21} & \dots & \sum \lambda_i a i_{41} & u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & u_3 \\ \sum \lambda_i a i_{14} & \dots & \dots & \sum \lambda_i a i_{44} & u_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Soient maintenant d, d' deux droites qui se coupent. Par trois points de d et deux points de d' passe une seule quadrique du système (1) et cette quadrique contient entièrement les deux droites, donc elle touche le plan déterminé par ces droites. Par conséquent, toute conique dégénérée de l'espace peut être représentée par les équations (1) et (2) moyennant (3).

§ 2. — *Interprétation hyperspatiale.*

9. Si l'on adopte la terminologie introduite par M. Klein dans son célèbre *Programme d'Erlangen* (*), on dira que le *groupe fondamental* de la géométrie de la conique dans l'espace est constitué par l'ensemble de toutes les transformations qui mutent une conique en une conique, et que cette géométrie consiste en la recherche des propriétés de l'espace invariantes par rapport à ce groupe. On peut donner une interprétation plus claire à ces mots en utilisant la notion d'hyperespace.

Rappelons en premier lieu ce que l'on entend par *surface de*

(*) Ces théories ont été développées par M. Klein dans l'ouvrage : *Einleitung in die höhere Geometrie*, II, Vorlesung gehalten im Sommersemester 1893. Ausgearbeitet von Fr. Schilling. Göttingen.

Véronèse (*). Soient, dans un plan de coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3), six coniques linéairement indépendantes

$$b1_x^2 = 0, \quad b2_x^2 = 0, \ldots, b6_x^2 = 0.$$

Toute conique du plan a une équation de la forme

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i b i_x^2 = 0. \tag{1}$$

Soient $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ les coordonnées homogènes d'un espace linéaire à cinq dimensions S_5. La surface définie par les équations

$$\rho X_i = b i_x^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{2}$$

est du quatrième ordre et a reçu le nom de *surface de Véronèse*, du nom du géomètre qui l'a le premier étudiée.

Moyennant (2), l'équation (1) s'écrit

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_6 X_6 = 0,$$

donc la surface de Véronèse s'obtient en rapportant projectivement les coniques d'un plan et les hyperplans d'un espace à cinq dimensions.

On conclut de là que le plan et la surface de Véronèse sont en correspondance birationnelle. Aux points d'une conique du plan correspondent les points d'une courbe du quatrième ordre, section hyperplane de la surface. Aux points d'une droite du plan correspondent les points d'une conique de la surface et ainsi la surface de Véronèse contient ∞^2 coniques ayant deux à deux un point commun. Cette propriété est caractéristique.

(*) On trouvera une théorie détaillée de la surface de Véronèse dans : Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità*. Chap. XIV et XV. Pisa, 1907.

10. Considérons de nouveau le système de quadriques (chap. II, § 1)

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i a i_x^2 = 0, \qquad (1)$$

et rapportons projectivement les quadriques de ce système aux hyperplans

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots, \lambda_6 X_6 = 0$$

de l'espace linéaire à cinq dimensions S_5. On aura, ρ étant un facteur de proportionnalité,

$$\rho X_i = a i_x^2. \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6) \qquad (2)$$

A tout point (x) de l'espace correspondra un point (X) de S_5, par suite les équations (2) représenteront une variété V à trois dimensions. A un point de V correspondra un seul point (x) de l'espace. L'ordre de cette variété sera égal à huit, car trois quadriques (1) ont huit points variables en commun. A une quadrique (1) de l'espace correspondra ainsi une surface du huitième ordre section hyperplane de V.

En résumé, nous avons une variété à trois dimensions V, du huitième ordre, en correspondance birationnelle avec l'espace linéaire à trois dimensions, de telle façon qu'à ses sections hyperplanes correspondent les quadriques du système (1).

Considérons maintenant le plan π d'équation

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

A une conique de ce plan correspond une quadrique du système (1) la contenant, et, par conséquent, un hyperplan de S_5. Ainsi les coniques du plan π et les hyperplans de S_5 sont rapportés projectivement, donc les points de la variété V correspondant aux points du plan π forment une surface de

Véronèse. On voit ainsi que *la variété* V *contient un système linéaire triplement infini de surfaces de Véronèse.*

A une conique de l'espace correspond sur la variété V une courbe du quatrième ordre entièrement située dans un hyperplan, puisque la conique est située sur une quadrique de (1). A une droite de l'espace correspond une conique de V. Deux surfaces de Véronèse de V ont en commun une conique.

En résumé, *la variété* V *contient un système linéaire* ∞^8 *de courbes rationnelles du quatrième ordre ; il y a* ∞^4 *de ces courbes qui dégénèrent en deux coniques, et ces* ∞^4 *coniques sont les intersections du système linéaire* ∞^5 *de surfaces de Véronèse situé sur* V.

Une transformation de l'espace à trois dimensions qui change une conique en une conique devient une transformation de la variété V en elle-même, qui échange les courbes du quatrième ordre du système ∞^8. Le groupe formé par toutes ces transformations de V en elle-même devient le groupe fondamental de notre géométrie.

Nous voyons en particulier que le groupe formé par les transformations projectives de S_5 qui laissent invariable la variété V, c'est-à-dire qui portent un point de V en un point de V, est un sous-groupe du groupe fondamental.

CHAPITRE III

Les congruences de coniques.

§ 1. — *Généralités.*

11. Reprenons, pour définir une conique, les équations (ch. II, § 1)

$$\lambda_1 a1_x^2 + \lambda_2 a2_x^2 + \ldots + \lambda_6 a6_x^2 = 0, \tag{1}$$

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0. \tag{2}$$

et, pour abréger, désignons les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6, u_1, u_2, u_3, u_4$ sous le nom de *coordonnées de la conique*.

On appelle *congruence de coniques*, l'ensemble des coniques de l'espace dont les coordonnées s'expriment en fonctions algébriques effectives de deux paramètres t_1, t_2. D'une façon générale, on aura huit équations algébriques indépendantes

$$F_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6; u_1, u_2, \ldots, u_4; t_1, t_2) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, 8) \tag{3}$$

homogènes par rapport aux (λ) et par rapport aux (u).

Entre les équations (3), éliminons les (λ); nous obtiendrons trois équations algébriques, homogènes en (u) :

$$\varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_4; t_1, t_2) = 0. \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Il se peut que les paramètres t_1, t_2 entrent effectivement dans ces équations, ou n'y entrent que par une de leurs combinaisons

$$\theta = \theta(t_1, t_2),$$

ou encore n'y entrent pas du tout, mais nous laisserons ce cas banal de côté. Dans le premier cas, les plans des coniques de la congruence enveloppent une surface, dans le second une développable.

Les équations (2), (3) et

$$u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + u_4y_4 = 0$$

où les (x) et les (y) sont fixes, ont en commun un nombre généralement fini de solutions; ce nombre est appelé *classe de la congruence*. On voit qu'il correspond au nombre de coniques de la congruence dont les plans passent par une droite fixe.

Selon que les plans des coniques d'une congruence enveloppent une surface (*) ou une développable, la classe de la congruence est supérieure ou égale à zéro.

Éliminons les (u) entre les équations (3), nous obtenons cinq équations indépendantes, algébriques, homogènes par rapport aux (λ),

$$\psi_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6;\ t_1, t_2) = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, 5) \qquad (5)$$

Dans ces équations, les paramètres t_1, t_2 peuvent entrer effectivement, ou par une de leurs combinaisons

$$\theta' = \theta'(t_1, t_2),$$

ou enfin peuvent ne pas y figurer du tout, mais ce dernier cas sera encore laissé de côté.

En correspondance, on aura une variété doublement infinie, ou simplement infinie de quadriques. Il est à remarquer que cette variété dépend du choix du système linéaire (1).

Terminons ce paragraphe en observant que puisque nous avons supposé que les fonctions qui figurent dans les équa-

---

(*) Pour abréger, cette surface sera dite *surface-enveloppe* de la congruence.

tions (3) étaient des fonctions effectives des deux paramètres t_1, t_2, ceux-ci ne peuvent pas entrer à la fois dans les équations (4) et (5) par une même combinaison, ce qui est géométriquement évident.

12. Étant données des valeurs quelconques des (x), les équations (1), (2) et (3) ont un nombre fini de solutions; donc par un point de l'espace il passe généralement un nombre fini de coniques d'une congruence. Ce nombre est appelé *ordre de la congruence.*

Il existe des points exceptionnels, ce sont les *points focaux.* Par chacun de ces points passent (au moins) deux coniques coïncidentes de la congruence. M. Darboux (*) a montré que dans une congruence de coniques, chaque conique possède six points focaux. Les points focaux d'une congruence de coniques décrivent les six nappes d'une surface appelée *surface focale.*

Exceptionnellement, il peut exister des points de l'espace par lesquels passent une infinité simple de coniques d'une congruence : ce sont les *points singuliers.* Un point singulier prend la place d'un point focal et le lieu des points singuliers d'une congruence ne peut être qu'une courbe, dite *courbe singulière.*

D'une façon générale, si les coniques d'une congruence possèdent $h(\leq 6)$ points singuliers sur une courbe C, celle-ci est dite *courbe* h — *singulière* et h nappes de la surface focale dégénèrent en la courbe C.

Enfin, il peut exister un point, dit *point principal,* qui est commun à toutes les coniques d'une congruence. Deux nappes de la surface focale dégénèrent évidemment en un pareil point.

Une congruence de coniques d'ordre un ne possède pas de points focaux, mais seulement des points singuliers et des points principaux (éventuellement).

(*) *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Paris, 1889, t. II, chap. I.

§ 2. — *Sur les congruences linéaires de coniques.*

13. Soit Γ une congruence linéaire (c'est-à-dire d'ordre un) de coniques. Les intersections des coniques de Γ avec un plan quelconque π forment une involution. D'après un théorème de M. Castelnuovo (*), cette involution est rationnelle. Or, cette involution est birationnellement équivalente à la congruence Γ, donc :

Une congruence linéaire de coniques est rationnelle.

De ce théorème de M. Castelnuovo, nous pouvons encore conclure que dans les équations d'une conique de la congruence Γ :

$$\lambda_1 a1_x^2 + \lambda_2 a2_x^2 + \ldots + \lambda_6 a6_x^2 = 0,$$
$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,$$

les (λ) et les (u) sont des fonctions effectives, homogènes et rationnelles de trois paramètres t_1, t_2, t_3, ou des fonctions non homogènes d'un paramètre.

Soient (ch. III, § 1),

$$\mathbf{F}_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5; u_1, u_2, u_3, u_4, t_1, t_2) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8) \quad (1)$$

les équations définissant la congruence Γ. D'après le théorème établi plus haut, les fonctions $\mathbf{F}_i$ sont rationnelles en t_1, t_2, algébriques et homogènes en (λ) et en (u). Résolvons ces équations par rapport aux (λ) et aux (u) et substituons à t_1, t_2 les rapports $\frac{t_1}{t_3}$, $\frac{t_2}{t_3}$, nous obtenons

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_6 = \varphi_1(t_1, t_2, t_3) : \varphi_2 : \ldots : \varphi_6,$$
$$u_1 : u_2 : u_3 : u = \psi_1(t_1, t_2, t_3) : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4,$$

les φ et les ψ étant rationnelles, entières et homogènes.

(*) *Sulla razionalità...* (Loc. cit.)

Une conique de la congruence Γ a donc pour équations

$$\sum_{k=1}^{6} \varphi_k(t_1, t_2, t_3) \cdot a k_x^2 = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \psi_i(t_1, t_2, t_3) x_i = 0. \tag{3}$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer (*), il peut arriver que dans la résolution des équations (1) on obtienne soit des fonctions φ, soit des fonctions ψ dans lesquelles un des paramètres t manque, le même paramètre ne pouvant du reste pas être absent simultanément dans les φ et dans les ψ. Cette remarque nous conduit à répartir les congruences linéaires de coniques en deux catégories, suivant que la surface enveloppe des plans des coniques est une développable ou une surface proprement dite, c'est-à-dire suivant que l'équation du plan d'une conique de la congruence a la forme

$$\sum_{i=1}^{4} \psi_i(t_1, t_2) x_i = 0,$$

ou la forme (3), dans laquelle t_1, t_2 et t_3 entrent effectivement.

On serait tenté d'introduire une nouvelle subdivision basée sur la dimension effective du système formé par les quadriques d'équation (2), mais cette subdivision serait artificielle, comme on s'en rend facilement compte sur un exemple. Supposons, en effet, que le système de quadriques (2) soit un faisceau. Nous pouvons toujours choisir, et d'une infinité de manières, un système linéaire ∞^5 de quadriques ne contenant pas ce faisceau. Les quadriques de ce nouveau système contenant les coniques de la congruence envisagée, seront généralement en nombre ∞^2, ce qui prouve notre assertion.

(*) Sous une forme un peu différente.

14. *Congruences de la première catégorie.* Soit Γ une congruence linéaire de coniques dont la courbe générique a pour équations

$$\sum_{k=1}^{6} \varphi_k(t_1, t_2, t_3) a k_x^2 = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1} \psi_i(t_1, t_2) x_i = 0. \qquad (4)$$

Désignons par Φ le système formé par les quadriques d'équation (2), système que nous supposons doublement infini, et par Ψ la développable enveloppée par les plans d'équation (4).

Sur un plan π de Ψ se trouvent ∞^1 coniques de Γ ; par un point quelconque de π ne peut passer qu'une de ces coniques, par suite elles forment un faisceau, car autrement la congruence ne serait pas linéaire. Désignons par φ le système formé par les ∞^1 quadriques de Φ qui marquent sur π les coniques de Γ. Le plan π ne peut faire partie de l'enveloppe de φ, car autrement toutes les coniques de la congruence dégénéreraient ; par suite φ est un faisceau.

Supposons que la classe de la développable Ψ soit supérieure à un. Par un point P de l'espace passent plus d'un plan de Ψ, et dans chacun de ces plans se trouve une conique de Γ passant par P ; la congruence Γ ne sera donc linéaire que si la développable Ψ est un faisceau de plans.

D'après ce que nous avons vu, à un plan du faisceau Ψ correspond un faisceau de quadriques φ, mais inversement un de ces faisceaux peut correspondre à un certain nombre ν de plans de Ψ.

Les fonctions $\varphi_i(t_1, t_2, t_3)$ sont rationnelles, de sorte que la variété de quadriques Φ est rationnelle, cette variété est donc une série rationnelle simplement infinie de faisceaux φ. Les groupes de ν plans de Ψ correspondants à un même faisceau φ forment une involution I_1^ν et cette involution est rapportée homographiquement à la série des faisceaux φ.

La droite a, axe du faisceau de plans Ψ, est évidemment une droite bisingulière de la congruence Γ. Dans chaque plan de Ψ se trouvent encore quatre points singuliers pour la congruence, ce sont les points-base du faisceau de coniques de Γ situées dans ce plan. Trois cas peuvent se présenter :

a) Aucun de ces quatre points ne se trouve généralement sur la droite a;

b) Un de ces points se trouve toujours sur a;

c) Deux de ces points se trouvent toujours sur a.

On obtient ainsi trois types de congruences que nous dénoterons par Γ_a, Γ_b, Γ_c.

15. Le lieu des quatre points singuliers d'une congruence Γ_a situés dans un plan de Ψ en dehors de la droite a est évidemment une courbe C, d'un certain ordre n, s'appuyant $n - 4$ fois sur la droite a. Soit k le nombre de points d'appui distincts de C sur a. Un de ces points d'appui est à la fois un point-base pour les faisceaux de coniques de Γ_a situés dans ν plans de Ψ, donc il est multiple d'indice ν pour C. Par suite, on a

$$n = k\nu + 4.$$

La congruence Γ_a la plus générale est le lieu des coniques s'appuyant en deux points sur une droite et en quatre points sur une courbe d'ordre $k\nu + 4$ *ayant* k *points multiples d'indice ν sur la droite singulière* (*).

D'après une remarque déjà faite, la congruence Γ_a est de classe zéro.

Remarquons enfin que si $k = 0$, $\nu = 1$, la courbe C est une

(*) Cette congruence est signalée par M. Montesano dans le cas $\nu = 1$. (*Sui varii tipi* .. Loc. cit.)

quartique gauche qui peut être de première espèce, et ainsi commune à ∞^1 quadriques. On aurait trouvé directement cette congruence en supposant le système (2) ∞^1.

16. Dans une congruence Γ_b, le lieu des trois points singuliers situés en dehors de la droite a dans tout plan passant par cette droite, est une courbe C d'un certain ordre n s'appuyant $n-3$ fois sur a. Soit k le nombre de points communs distincts à C et à a. Deux cas peuvent se présenter :

1° Le point-base sur a des faisceaux de coniques Γ_q situés dans les plans passant par a est variable sur cette droite;

2° Ce point est fixe.

Dans le premier cas, chaque point d'appui de C sur a est multiple d'indice ν pour C et on doit avoir

$$n = k\nu + 3.$$

Dans le second cas, la courbe C passe évidemment par le point fixe si $k \geq 1$. Soit P ce point fixe (principal pour sa congruence), p sa multiplicité pour la courbe C. Les $k-1$ points d'appui restants de C sur a sont multiples d'indice ν pour C, et l'on a

$$n = (k-1)\nu + p + 3.$$

Les congruences Γ_b *les plus générales sont :*

1° *Le lieu des coniques s'appuyant en deux points sur une droite* a *et en trois points sur une courbe d'ordre* $k\nu + 3$ *ayant* k *points multiples d'indice* ν *sur la droite singulière. Les coniques de la congruence situées dans un plan passant par* a *forment un faisceau ayant un point-base sur* a *et les coniques passant par un point de* a *se distribuent en* ν *faisceaux analogues;*

2° *Ou bien le lieu des coniques passant par un point fixe, s'appuyant sur une droite passant par ce point, et s'appuyant en trois points sur une courbe d'ordre* $(k-1)\nu+p+3$ *ayant* $k-1$ *points multiples d'indice* ν *sur la droite singulière et de plus un point multiple d'indice* p *au point principal.*

Les congruences Γ_b sont de classe nulle.

17. Dans une congruence Γ_c, les points singuliers situés dans un plan passant par a sont au nombre de quatre, deux sur a, deux en dehors de cette droite. Il peut se faire que les points singuliers situés sur a soient tous deux mobiles, ou que l'un deux soit fixe, ou enfin qu'ils soient tous deux fixes.

Dans chaque cas, le lieu des deux autres points singuliers est une courbe C, hyperelliptique, d'ordre n, s'appuyant $n-2$ fois sur a.

Dans le premier cas, on a k points d'appui multiples d'indice ν et

$$n = k\nu + 2.$$

Dans le second cas, la congruence a un point principal multiple d'indice p pour C et $k-1$ points de a sont multiples d'indice ν pour C; on a

$$n = (k-1)\nu + p + 2.$$

Enfin, dans le troisième cas, la congruence a deux points principaux, l'un multiple d'indice p, l'autre d'indice $n-p-2$ pour C.

Les congruences Γ_c *les plus générales sont :*

1° *Le lieu des coniques s'appuyant en deux points sur une droite et en deux points sur une courbe d'ordre* $k\nu+2$ *ayant* k *points multiples d'indice* ν *sur la droite singulière. Les coniques passant par un point de la droite singulière se distribuent en* ν *faisceaux dans* ν *plans passant par la droite singulière et ces faisceaux ont un second point-base sur cette droite;*

2° *Ou bien le lieu des coniques s'appuyant en deux points dont un fixe sur une droite et en deux points sur une courbe d'ordre* $(k-1)\nu+p+2$ *ayant un point multiple d'ordre* p *au point principal et* $k-1$ *points multiples d'indice* ν *sur la droite singulière. Les coniques passant par un point de cette droite se distribuent en* ν *faisceaux de plans différents.*

3° *Ou enfin le lieu des coniques passant par deux points fixes et s'appuyant deux fois sur une courbe d'ordre* n *ayant aux points fixes des multiplicités d'ordres* p, $n-p-2$ *respectivement.*

18. Congruences de la seconde catégorie. — Soit maintenant Γ une congruence engendrée par les intersections des quadriques

$$\sum_{k=1}^{6} \varphi_k(t_1, t_2, t_3) a k_x^2 = 0$$

d'une variété Φ doublement infinie, et des plans correspondants

$$\sum_{i=1}^{4} \psi_i(t_1, t_2, t_3) x_i = 0$$

d'une surface-enveloppe Ψ.

La variété Φ et la surface Ψ sont rationnelles.

Nous désignerons par n_2 l'indice (*) de Φ, par n_1 la classe de Ψ, et nous supposerons que dans un plan tangent à Ψ se trouvent ν_1 coniques de Γ et que sur une quadrique de Φ il s'en trouve ν_2.

Supposons qu'aux plans tangents à Ψ et passant par un point P correspondent des quadriques de Φ formant un système simplement infini φ d'indice μ_2 et qu'inversement à une quadrique de φ correspondent $k_1 (\leq \nu_2)$ plans passant par P. De même aux quadriques passant par P correspondent les plans

(*) Nombre de quadriques passant par deux points.

d'une développable ψ d'indice (classe) μ_1 circonscrite à Ψ, un plan de cette développable correspondant à $k_2 (\leq \nu_1)$ quadriques passant par P. On a d'ailleurs

$$\mu_1 k_2 = \mu_2 k_1. \qquad (1)$$

Considérons maintenant le lieu des coniques de la congruence dont les plans passent par un point générique P. Ce lieu est une surface **F** passant simplement par P, puisque par ce point passe une seule conique Γ. Les plans des coniques de **F** s'appuyant sur une droite passant par P contiennent évidemment cette droite, donc ils sont au nombre de n_1. Chacun d'eux contient ν_1 coniques de Γ et, par suite, **F** est d'ordre $2n_1\nu_1 + 1$.

Les coniques de la congruence Γ *dont les plans passent par un point fixe engendrent une surface d'ordre* $2n_1\nu_1 + 1$ (*).

Mais nous pouvons calculer l'ordre de cette surface d'une autre manière. Soit (x) une ponctuelle quelconque. Par un point X_1 de (x) passent n_1 plans tangents à Ψ et passant par P, à ces plans correspondent $n_1\nu_1$ quadriques de Φ marquant sur (x), $2n_1\nu_1$ points X_2. Inversement, à un point X_2 correspondent $\mu_2 k_1$ points X_1. D'après le principe de Chasles, il y a $2n_1\nu_1 + \mu_1 k_1$ coïncidences des points X_1, X_2 et un de ces points appartient à **F**; nous trouvons donc pour l'ordre de cette surface un nombre plus élevé que tantôt.

Pour éviter cette contradiction, nous devons admettre qu'il existe une développable Δ de classe δ, circonscrite à Ψ, dont tout plan forme, avec $\frac{1}{\delta}(\mu_2 k_1 - 1)$ plans d'une seconde développable Δ', de classe δ', des quadriques de la variété Φ. Nous n'excluons pas la dégénérescence éventuelle de la développable D et par suite de la développable D'. Les coniques de Γ situées dans les plans passant par P forment une surface d'ordre $2n_1\nu_1 + \mu_2 k_1$, mais chaque plan de D passant par P

(*) Ce théorème a été établi par M. MONTESANO, *Su le congruenze* .. (LOC. CIT.)

entre $\frac{1}{\beta}(\mu_2 k_1 - 1)$ fois dans cette surface; il reste donc une surface d'ordre effectif $2n_1\nu_1 + 1$, ce qui est conforme au théorème établi plus haut.

19. Considérons une droite a appartenant à la surface Ψ, de sorte que tout plan passant par a contient des coniques de la congruence Γ. Ces coniques seront marquées par les quadriques d'un système A, simplement infini, appartenant à Φ. Il peut arriver que A se scinde en deux systèmes, dont l'un, A', est tel que chacune des quadriques lui appartenant contient a. Alors dans tout plan passant par a se trouvent un certain nombre α de coniques dégénérées. Ces coniques dégénèrent en la droite a et en une autre droite, ou bien en la droite a comptée deux fois. Nous aurons à distinguer ces deux cas dans la suite. Pour le moment, remarquons que la droite a est multiple d'ordre α pour toute surface **F**.

Pour atteindre la plus grande généralité, nous supposerons qu'il existe p droites $a_1, a_2, \ldots, a_p$ analogues à a, et nous indiquerons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ leurs multiplicités respectives pour chaque surface **F**.

20. Une congruence linéaire de coniques ne peut posséder de points focaux. Supposons, de plus, que la congruence Γ ne possède aucun point principal, quitte à examiner ce cas plus tard. Chaque conique de Γ possède six points singuliers qui peuvent se répartir sur k courbes singulières $C_1, C_2, \ldots, C_k$ respectivement d'ordres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, de telle manière que la $i^{ème}$ courbe C_i soit m_i — singulière. On aura évidemment

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = 6. \qquad (2)$$

Les courbes $C_1, \ldots, C_k$ appartiendront à chaque surface **F** avec certaines multiplicités que nous représenterons par $q_1, q_2, \ldots, q_k$ respectivement.

Envisageons deux surfaces **F** relatives à deux points quelconques P_1, P_2. Ces deux surfaces auront en commun les courbes singulières, les droites a_1, ..., a_p et enfin $n_1 \nu_1$ coniques de Γ dont les plans passent par $P_1 P_2$. On aura donc, s'il n'existe aucune droite singulière admettant des coniques infiniment voisines (*),

$$(2n_1\nu_1 + 1)^2 = 2n_1\nu_1 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i^2 + \sigma, \tag{3}$$

moyennant

$$\sigma = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2. \tag{4}$$

Considérons maintenant une surface **F** et une conique de Γ n'appartenant pas à **F**. Les points de rencontre de cette conique avec **F** se trouveront nécessairement sur les lignes singulières de la congruence, donc on a

$$2(2n_1\nu_1 + 1) = m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots + m_k q_k. \tag{5}$$

Reprenons l'examen de la droite a considérée au numéro précédent. Si les coniques dégénérées de Γ situées dans les plans passant par a sont composées de a et d'autres droites, ces dernières s'appuient sur a et sur les courbes singulières, mais elles doivent engendrer une surface, donc les points d'appui sur les courbes singulières sont au nombre de deux. La droite a devant former une conique de la congruence avec une bisécante de l'ensemble des courbes singulières, s'appuie nécessairement en quatre points sur cet ensemble.

Si les coniques dégénérées situées dans les plans passant par a se composent de la droite a comptée deux fois, cette droite s'appuie naturellement six fois sur les courbes singulières.

(*) Voir MONTESANO, *Sui varii tipi...* (LOC. CIT.)

§ 3. *Congruences linéaires de coniques ayant une courbe sextisinguliere.*

21. Proposons-nous maintenant de rechercher les congruences de coniques Γ n'ayant qu'une seule courbe singulière. Les formules (2), (3) et (5) deviennent alors

$$(2n_1\nu_1 + 1)^2 = 2n_1\nu_1 + \lambda q^2 + \sigma,$$
$$(2n_1\nu_1 + 1) = 3q.$$

L'élimination de q donne

$$(2n_1\nu_1 + 1)^2 (9 - \lambda) = 18n_1\nu_1 + 9\sigma.$$

Le second membre étant au moins égal à l'unité, on a pour λ les seules valeurs possibles 6, 7 ou 8. Nous allons examiner ces différents cas en détail.

22. Commençons par le cas $\lambda = 6$. On a

$$4(n_1\nu_1)^2 - 2n_1\nu_1 + 1 - 3\sigma = 0,$$

d'où

$$n_1\nu_1 = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{12\sigma - 3}\right)$$

Le signe — doit évidemment être rejeté. De plus, $\nu_1 = 1$. Posons

$$12\sigma - 3 = z^2,$$

d'où

$$n_1 = \frac{z + 1}{4}$$

Nous voyons que $z^2 + 3$ est multiple de 12, donc z est multiple de 3. Posons donc $z = 3z'$, il vient

$$3z'^2 + 1 = 4\sigma, \qquad 3z' + 1 = 4n_1.$$

Par soustraction, on voit que $3z'^2 - 3z'$ est multiple de 4, c'est-à-dire que $z'(z'-1)$ est multiple de 4. On en conclut que z' est multiple de 4 ou multiple de 4 augmenté d'une unité. Dans la première alternative, en supposant $z' = 4\varepsilon$, on aurait

$$4n_1 = 12\varepsilon + 1,$$

ce qui est impossible en nombres entiers. Dans la seconde hypothèse, posons $z' = 4\varepsilon + 1$, ε étant entier positif; alors on a

$$n_1 = 3\varepsilon + 1, \qquad q = 2\varepsilon + 1, \qquad \sigma = 12\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 1.$$

Une conique de la congruence ne peut évidemment dégénérer en une droite comptée deux fois, car une telle droite s'appuyerait en six points sur la courbe singulière C, du sixième ordre. Les droites que nous avons appelées $a_1, a_2, \ldots, a_p$ forment donc, avec d'autres droites, des coniques dégénérées de la congruence. Mais ici on a $\nu_1 = 1$, donc $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1, \ldots, \alpha_p = 1$. D'autre part, une sextique gauche a au plus six quadrisécantes (*) et chacune des droites $a_1, \ldots a_p$ est nécessairement une quadrisécante, donc on a $p \leq 6$ et, par suite,

$$12\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 1 \leqslant 6.$$

La seule solution possible en nombre entier est $\varepsilon = 0$, donc

$$n_1 = 1, \qquad q = 1, \qquad \sigma = 1.$$

Les surfaces **F** sont des surfaces cubiques passant simplement par C et a, donc le genre de C est égal **2** et cette courbe ne possède que la seule quadrisécante a. Deux surfaces **F** ont en commun une conique de la congruence et ces surfaces for-

---

(*) F. Deruyts, *Note sur la configuration formée par les quadrisécantes des courbes gauches rationnelles du sixième ordre.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1898, (3), XXXV, pp. 421-438.)

ment un réseau générateur. Les plans des coniques de la congruence passent par un même point ($n_1 = 1$), ce point est situé sur la droite a. En effet, dans le cas actuel, la surface Ψ dégénère en une gerbe et la droite a doit appartenir à cette gerbe.

A) *La congruence linéaire de coniques ayant une courbe gauche du sixième ordre sextisingulière est le lieu des intersections variables des surfaces cubiques passant par la courbe singulière et par sa quadrisécante. Celle-ci est unique, la courbe singulière est de genre deux et la congruence est de la classe un; tous les plans des coniques de la congruence se coupent en un même point de la quadrisécante.*

Cette congruence a été rencontrée par M. Montesano (*) et, plus récemment, par M. Stuyvaert (**).

23. Envisageons maintenant le cas $\lambda = 7$. On a évidemment $\nu_1 = 1$, et

$$8n_1^2 - 10n_1 + 2 - q\sigma = 0.$$

On en déduit

$$n_1 = \frac{1}{8}\left(5 \pm 3\sqrt{8\sigma + 1}\right).$$

Posons

$$8\sigma + 1 = z^2,$$

d'où

$$8n_1 = 5 + 3z,$$

car il est évident que le signe — est à rejeter. Additionnons les deux dernières égalités après avoir multiplié les deux membres de la première par 5; nous voyons que z $(5z + 3)$ est multiple de 8. Un calcul simple, analogue à celui que nous avons effectué plus haut, montre que l'on doit avoir $z = 8\varepsilon + 1$, ε étant un nombre entier positif. Alors, on a

$$n_1 = 3\varepsilon + 1, \qquad q = 2\varepsilon + 1, \qquad \sigma = 2\varepsilon(4\varepsilon + 1).$$

(*) *Sui varii tipi...* (Loc. cit.)

(**) *Sur certaines courbes gauches du sixième ordre.* (Konink. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag, 1908, pp. 400-406.)

Supposons d'abord qu'il n'existe pas de coniques de la congruence dégénérées en des droites comptées deux fois. Alors les droites $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont toutes des quadrisécantes de la courbe singulière C. Cette courbe aura le plus grand nombre de quadrisécantes lorsqu'elle sera rationnelle, donc, d'après un théorème de F. Deruyts (*), on a $p \leq 20$.

Par une des quadrisécantes éventuelles a de C, menons un plan π. Ce plan rencontre encore C en trois points et la droite qui joint deux quelconques de ces points forme avec a une conique de la congruence. Le plan π contient donc trois coniques dégénérées de la congruence et, par suite, la droite a est triple pour chaque surface **F**. Ainsi, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 3$ et

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 9p = 8\varepsilon^2 + 2\varepsilon.$$

Une première solution est fournie par $\varepsilon = 0$, $p = 0$. Voyons s'il peut exister d'autres solutions, en nombres entiers et positifs, de l'équation précédente. On a nécessairement

$$\varepsilon = \frac{1}{8}\left(-1 + \sqrt{72p + 1}\right).$$

Posons $z^2 = 72p + 1$. Le produit $(z - 1)(z + 1)$ doit être divisible par 72. L'un des facteurs doit être multiple de 9. D'autre part, si l'un des facteurs est multiple de 4, l'autre est multiple de 2, il suffit donc de considérer les cas suivants : $z = 36\eta_1 + 1$; $z = 18\eta_1 + 1$, $z = 18\eta_1 - 1$, $z = 36\eta_1 - 1$, η_1 étant dans chaque cas un nombre entier et positif. Les valeurs correspondantes de p sont : $p = 72\eta_1(18\eta_1 + 1)$, $p = 36\eta_1(\eta_1 + 1)$, $p = 36\eta_1(\eta_1 - 1)$, $p = 72\eta_1(18\eta_1 - 1)$. Dans chaque cas, p doit être au plus égal à vingt, ce qui exige toujours $\eta_1 = 0$. Nous voyons donc que la courbe C ne peut avoir de quadrisécantes,

---

(*) *Notes sur les sécantes multiples des courbes gauches rationnelles.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1898, (3), XXXV, pp. 287-294.

car de $\eta = 0$, on conclut $p = 0$. On a $n_1 = 1$, $q = 1$, de sorte que les surfaces **F** deviennent des surfaces cubiques. Les plans des coniques de la congruence forment une gerbe dont le sommet O est un point singulier et, par conséquent, se trouve sur la courbe singulière C. Les surfaces cubiques **F** forment un réseau, chacune de ces surfaces étant le lieu des coniques de la congruence dont les plans passent par une droite contenant le point O.

La classe de la congruence est égale à l'unité.

La courbe C, du septième ordre, étant la base d'un réseau de surfaces cubiques, est de genre cinq (*). Donc :

B) *Une congruence linéaire de coniques possédant une courbe singulière du septième ordre est constituée par le lieu des intersections variables des surfaces cubiques d'un réseau ayant pour base une courbe gauche d'ordre sept et de genre cinq.*

Une courbe gauche d'ordre sept et de genre cinq peut dégénérer en une courbe gauche du sixième ordre et de genre deux et en une quadrisécante de cette courbe. On voit ainsi que la congruence A) du numéro précédent se présente comme cas particulier de la congruence B).

La congruence B) a été étudiée par M. Montesano et rencontrée par M. Veneroni, comme nous l'avons déjà indiqué (ch. I, § 2).

24. Passons au cas général en supposant que la congruence possède des coniques dégénérées en des droites comptées deux fois. De pareilles droites sont des sextisécantes de la courbe singulière C, d'ordre 7.

S'il existait deux sextisécantes de la courbe C, ces droites et la courbe elle-même seraient situées sur une quadrique lieu des droites s'appuyant sur C et sur les sextisécantes. Toute conique s'appuyant en six points sur C appartiendrait à cette quadrique, de sorte que ces coniques ne forment certaine-

(*) STUYVAERT, *Cinq études...* (LOC. CIT.) (Étude I.)

ment pas une congruence. On supposera donc que la courbe C admet une seule sextisécante a_1 et quelques quadrisécantes $a_2, a_3, \ldots, a_p$.

La droite a_1 fait partie d'une seule conique dégénérée, donc $\alpha_1 = 1$. Chacune des $p - 1$ quadrisécantes de la courbe C fait partie de trois coniques dégénérées appartenant à une même surface **F**, donc $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_p = 3$. On a ainsi

$$8\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 8 - 9p = 0,$$

équation que l'on obtient en égalant les deux valeurs de σ : $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2$, $8\varepsilon^2 + 2\varepsilon$. Un raisonnement analogue à celui qui a été développé au numéro 23 montre que la seule solution possible en nombres entiers est $p = 2$, $\varepsilon = 1$ (on tient compte dans le calcul de la limite supérieure de p).

Pour $\varepsilon = 1$, on a $n_1 = 4$, $q = 3$. Les surfaces **F** sont des surfaces du neuvième ordre passant triplement par la courbe C et sa quadrisécante a_2, simplement par la sextisécante a_1.

Considérons un point P quelconque sur la droite a_2 et construisons la surface **F** relative à ce point. La surface $\mathbf{F}_1$, lieu des bisécantes de C s'appuyant sur a_2, va évidemment faire partie de **F**. Supposons que par un point arbitraire de a_2 passent k bisécantes de C, alors $\mathbf{F}_1$ est d'ordre $k + 3$. $\mathbf{F}_1$ faisant partie d'une surface **F**, d'ordre 9, on a $k \geqslant 6$. La courbe C, d'ordre sept, possédant une sextisécante a_1, est rationnelle, elle se projette du point P sur un plan π en une courbe rationnelle C′ possédant un point quadruple et k points doubles. La courbe C′ possède donc en outre un certain nombre de points singuliers équivalents à $9 - k$ points doubles, car une courbe plane d'ordre sept est au plus de genre 15 et un point quadruple abaisse le genre de 6 unités, k points doubles de k unités. Remarquons que par un point quelconque de a_2 il ne passe jamais de trisécante de C, car une pareille droite rencontrerait chaque surface **F** (d'ordre 9) en douze points et appartiendrait ainsi à toutes ces surfaces, ce qui est impossible. Les nouvelles sin-

gularités de la courbe C′ proviennent donc de points multiples effectifs (non apparents) de C. Un point multiple de C se trouve nécessairement sur la sextisécante a_1 et il est au plus triple, car autrement il appartiendrait aussi à a_2, ce qui n'est pas possible. Supposons donc que sur a_1 se trouvent x_1 points simples, x_2 points doubles et x_3 points triples de C. On a évidemment

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6,$$
$$x_2 + 3x_3 + k = 9.$$

La surface $\mathbf{F}_1$ passe doublement par la courbe C et une surface $\mathbf{F}$ triplement par la même courbe, de sorte que $\mathbf{F}_1$ n'est certainement pas d'ordre neuf. La surface $\mathbf{F}$ relative au point P se scinde alors en deux surfaces, la surface $\mathbf{F}_1$, d'ordre $k + 3$, et une surface $\mathbf{F}_2$, d'ordre $6 - k$, passant simplement par C. Cette courbe n'est certainement ni plane, ni située sur une quadrique, car alors la congruence cesserait d'exister. On a donc $k \leq 3$.

Une section plane de la surface $\mathbf{F}_1$ a certainement 7 points doubles (sur C); le genre de cette section ne pouvant être négatif, l'ordre de $\mathbf{F}_1$ est au moins égal à 6, ce qui donne $k \geq 3$. On a donc finalement $k = 3$. Un simple calcul donne alors $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Ainsi la courbe C possède deux points triples sur la droite a_1 (*).

La surface $\mathbf{F}_2$ est du troisième ordre, elle contient la courbe C et les droites a_1, a_2. A chaque point P de a_2 correspond une surface de $\mathbf{F}_2$ et toutes ces surfaces $\mathbf{F}_2$ forment un faisceau, puisque la congruence est linéaire.

Reprenons la surface $\mathbf{F}_2$ relative au point P de a_2. Les coniques de la congruence situées sur $\mathbf{F}_2$ forment évidemment

(*) Ces points sont évidemment doubles pour toutes les surfaces $\mathbf{F}_2$, puisque toute section plane d'une de ces surfaces par a_1 a des points doubles en ces points.

un faisceau dont l'axe d appartient à la surface et passe par P, puisque par hypothèse tous les plans des coniques envisagées passent par ce point. La droite d s'appuie aussi sur la droite a_1, puisque celle-ci intervient sur $\mathbf{F}_2$ comme conique dégénérée du faisceau. Enfin la droite d s'appuie sur C, car toute conique du faisceau contient seulement six points de C. Nous en concluons donc que la surface-enveloppe des plans des coniques de la congruence est le lieu des droites s'appuyant sur la courbe C et les droites a_1, a_2. Cette surface est du quatrième ordre (nous avions déjà trouvé $n_1 = 4$), car toute quadrique lieu des droites s'appuyant sur a_1, a_2 et sur une droite arbitraire b, rencontre C en quatre points en dehors de a_1 et a_2. De plus, cette surface passe simplement par C et a_2, triplement par a_1.

C) *Une seconde congruence linéaire de coniques possédant une courbe sextisingulière d'ordre sept est constituée par les coniques s'appuyant en six points sur une courbe gauche d'ordre sept ayant deux points triples et une seule quadrisécante. L'enveloppe des plans de ces coniques est la surface d'ordre quatre lieu des droites s'appuyant sur la courbe, sur la quadrisécante et sur la droite joignant les deux points triples.*

Cette congruence a été signalée par M. Montesano (*).

25. Envisageons le cas $\lambda = 8$. On a

$$4(n_1\nu_1)^2 - 14(n_1\nu_1) + 1 - 9\sigma = 8,$$

d'où

$$n_1\nu_1 = \frac{1}{4}\left(7 \pm 3\sqrt{4\sigma + 5}\right)$$

On voit immédiatement que le signe — est à rejeter, $n_1\nu_1$ devant être positif et le radical étant au moins égal à 3.

(*) *Sui varii tipi...* (Loc. cit., II, p. 18.)

Posons $4\sigma + 5 = z_2$, il vient $n_1 \nu_1 = \frac{1}{4}(3z + 7) = \frac{3}{4}(z + 1) + 1$. On voit ainsi que $z + 1$ est multiple de 4, c'est-à-dire que l'on a $z = 4\varepsilon - 1$, ε étant entier et positif. Il vient alors

$$n_1\nu_1 = 3\varepsilon + 1, \qquad q = 2\varepsilon + 1, \qquad \sigma = 4\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1.$$

Soit a une quadrisécante éventuelle de la courbe singulière C. Un plan π passant par a rencontre encore C en quatre points variables et la droite a forme, avec une droite unissant deux de ces points, une conique dégénérée de la congruence; par suite, chaque surface **F** passe six fois par la droite a.

Une sextisécante éventuelle de la courbe C est évidemment simple pour chaque surface **F**. Remarquons qu'il ne peut exister trois pareilles droites, car, dans ce cas, la courbe C serait tout entière sur l'hyperboloïde ayant ces droites comme directrices, et la congruence cesserait d'exister, toutes ses coniques étant situées sur la quadrique.

Nous avons donc à examiner les cas suivants :

a) La courbe C possède p quadrisécantes et ne possède aucune sextisécante. Alors

$$\sigma = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 36p.$$

b) La courbe C possède $p' = p - 1$ quadrisécantes et une sextisécante. Ici

$$\sigma = 36p' + 1.$$

c) La courbe C possède $p'' = p - 2$ quadrisécantes et deux sextisécantes. Dans ce cas, on a

$$\sigma = 36p'' + 2.$$

On a vu que

$$\sigma = 4\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1.$$

Donc, dans le premier cas, on doit avoir

$$36p = 4\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1$$

ou

$$18p = 2\varepsilon^2 - \varepsilon - \frac{1}{2}.$$

Cette équation est impossible pour p, ε entiers et positifs, donc le premier cas doit être rejeté.

Envisageons le second cas *b*). Alors

$$18p' = 2\varepsilon^2 - \varepsilon - 1,$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\left(1 + 3\sqrt{1 + 16p'}\right)$$

Posons $1 + 16p' = z^2$. Alors $(z - 1)(z + 1)$ est multiple de 16. Si l'un des facteurs est multiple de 8, l'autre sera pair, il suffit donc de considérer les cas $z = 8\eta_1 + 1$, $z = 8\eta_1 - 1$, η_1 étant entier positif dans chaque cas. Ces cas donnent respectivement pour ε les valeurs $\varepsilon = 6\eta_1 + 1$, $\varepsilon = 6\eta_1 - \frac{1}{2}$. La seconde est évidemment à rejeter.

Ainsi, dans l'hypothèse *b*), on a $\varepsilon = 6\eta_1 + 1$, $p' = \eta_1(4\eta_1 + 1)$.

Plaçons-nous enfin dans l'hypothèse *c*). On doit avoir :

$$18p'' = 2\varepsilon^2 - \varepsilon - 1 - \frac{1}{2},$$

équation impossible en nombres entiers.

En résumé, lorsqu'une congruence linéaire de coniques possède une courbe sextisingulière d'ordre huit, on a

$$n_1\nu_1 = 2(9\eta_1 + 2), \quad q = 3(4\eta_1 + 1), \quad \sigma = 144\eta_1^2 + 36\eta_1 + 1.$$

La courbe singulière possède une sextisécante et $\eta_1(4\eta_1 + 1)$ quadrisécantes.

Soit a une des quadrisécantes éventuelles de la courbe C ($\eta < 0$). Si nous désignons par π le genre de C, il passera $15 - \pi$ bisécantes de cette courbe par un point P de a. Mais la surface $\mathbf{F}$ relative au point P passe six fois par a et contient la surface lieu des bisécantes de C s'appuyant sur a, donc $15 - \pi \leq 6$ et $\pi \geq 9$.

D'autre part, si nous projetons la courbe C sur un plan quelconque d'un point commun à C et à la sextisécante, nous voyons que $\pi \leq 5$. Nous arrivons ainsi à une absurdité provenant de ce que nous avons supposé $\eta > 0$. Ainsi on a $\eta = 0$ et $n_1 \nu_1 = 4$, $q = 3$, $\sigma = 1$.

Soit Q un point quelconque de la courbe C. La surface $\mathbf{F}$ relative au point Q va se scinder en une surface $\mathbf{F}_1$ lieu des coniques de la congruence passant par Q_1 et en une surface résidu $\mathbf{F}_2$. La surface $\mathbf{F}_1$ est du sixième ordre, car la courbe C étant triple pour $\mathbf{F}$, une droite issue de Q est la corde de trois coniques de la congruence passant par Q. La surface $\mathbf{F}_2$ est alors du troisième ordre, elle passe simplement par C et par la sextisécante d. La surface $\mathbf{F}_1$ passe doublement par C.

Les surfaces $\mathbf{F}_2$ construites en partant de tous les points de la courbe C forment nécessairement un faisceau et les coniques de la congruence situées sur une de ces surfaces forment un faisceau, sans quoi la congruence ne serait pas linéaire. La courbe C et la droite d forment donc la base d'un faisceau de surfaces cubiques.

Considérons une conique de la congruence et la surface $\mathbf{F}_2$ qui la contient. Le plan de la conique rencontre cette surface en une droite qui s'appuie nécessairement sur d et deux fois sur C. Ainsi, *les plans des coniques de la congruence enveloppent la surface lieu des bisécantes de* C *s'appuyant sur* d.

Si nous construisons la surface $\mathbf{F}$ relative à un point de la droite d, nous voyons qu'elle comprend autant de surfaces $\mathbf{F}_2$ qu'il passe de bisécantes de C par le point choisi. Si k est ce nombre, comme $\mathbf{F}$ est d'ordre 9, on a nécessairement $k \leq 3$. La surface enveloppe Ψ des plans des coniques de la congruence est alors d'ordre $k+1$. Si un plan tangent à Ψ conte-

nait deux coniques de la congruence ($\nu_1 > 1$), il y aurait deux bisécantes de C s'appuyant sur d dans ce plan. Donc si $\nu_1 > 1$, $k > 1$. D'autre part, $k + 1$ doit être un diviseur de 4, puisque $n_1\nu_1 = 4$. Le seule solution possible est évidemment $n_1 = 4$, $\nu_1 = 1$, $k = 3$. La courbe C est alors de genre 3.

Les surfaces F_2 marquent sur un plan passant par d, un faisceau de coniques dont les points-base sont nécessairement sur C; par suite, deux de ces points se trouvent sur la droite d. Par conséquent, la courbe C s'appuie sur la droite d en deux points distincts, et ces points sont nécessairement triples pour la courbe C et doubles pour les surfaces F_2, puisque toute section plane d'une de ces surfaces passant par d a des points doubles en ces points.

D) *L'unique congruence linéaire de coniques admettant une courbe sextisingulière du huitième ordre est constituée par les coniques s'appuyant en six points sur une courbe du huitième ordre et de genre trois ayant deux points triples* (*).

On voit que si la courbe du huitième ordre dégénère en une courbe rationnelle du septième ordre, dotée de deux points triples, jointe à sa quadrisécante, on retrouve la congruence *c*) du numéro 24.

En résumé : *Si une congruence linéaire de coniques possède une courbe sextisingulière, cette courbe est*

1° *D'ordre huit, de genre trois, dotée de deux points triples, éventuellement dégénérée en une courbe rationnelle du septième ordre jointe à sa quadrisécante et dotée de deux points triples;*

2° *D'ordre sept, de genre cinq, éventuellement dégénérée en une courbe du sixième ordre, de genre deux, jointe à sa quadrisécante* (**).

(*) Cette congruence a été signalée par M. Montesano, *Sui varii tipi...* (Loc. cit., pp. 15 et suiv.)

(**) Ces congruences ont été rencontrées par M. Montesano, mais ce géomètre ne prouve pas que les congruences A (n° 22) et C (n° 24) sont les seuls cas particuliers des congruences B (n° 23) et D (n° 25) donnant une seule courbe sextisingulière.

§ 4. — *Congruences linéaires de coniques ayant une courbe bisingulière et une courbe quartisingulière.*

26. Considérons une congruence linéaire de coniques Γ, possédant une courbe bisingulière C_1 d'ordre λ_1 et une courbe quartisingulière C_2 d'ordre λ_2. On a $\lambda_1 \geq 2$ (*), $\lambda_2 \geq 4$.

Les équations (3) et (5) du numéro 20 deviennent ici :

$$(2n_1\nu_1 + 1)^2 = 2n_1\nu_1 + \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \sigma, \qquad (1)$$

$$2n_1\nu_1 + 1 = q_1 + 2q_2. \qquad (2)$$

Éliminons $2n_1\nu_1$ entre ces équations, elles deviennent

$$(\lambda_2 - 4)q_2^2 - 2(2q_1 - 1)q_2 + (\lambda_1 - 1)q_1^2 + q_1 + \sigma - 1 = 0. \qquad (3)$$

Le discriminant de l'équation (3), où q_2 est considéré comme inconnue, doit être positif ou nul, car q_2 est un nombre entier et par suite est réel. Ainsi

$$(4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2)q_1^2 - \lambda_2(q_1 - 1) - (\lambda_2 - 4)\sigma - 3 > 0. \qquad (4)$$

On a $q_1 \geq 1$, $\lambda_2 \geq 4$, de sorte que $\lambda_2(q_1 - 1) + (\lambda_2 - 4)\sigma + 3$ est certainement positif. L'inégalité précédente entraîne donc

$$4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 > 0. \qquad (5)$$

Puisque $\lambda_1 \geq 2$, $\lambda_1 - 1$ est positif et l'on a

$$\lambda_2 < \frac{4\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \quad \text{ou} \quad 4 + \frac{4}{\lambda_1 - 1}.$$

La plus grande valeur de la fraction $\frac{4}{\lambda_1 - 1}$ est atteinte pour $\lambda_1 = 2$; donc $\lambda_2 < 8$. L'ordre de la courbe C_2 peut donc prendre les valeurs $\lambda_2 = 4, 5, 6, 7$.

(*) Le cas $\lambda_1 = 1$ rentre dans la première catégorie (chap. III, § 2).

Pour $\lambda_2 = 4$, le polynôme $4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2$ est positif quelle que soit la valeur attribuée à λ_1. Pour $\lambda_2 = 5$, on a $4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 = 5 - \lambda_1 > 0$, et λ_1 peut prendre les valeurs 2, 3, 4. Si $\lambda_2 = 6$, 7, λ_1 peut seulement prendre la valeur $\lambda_1 = 2$. Ainsi :

Si une congruence linéaire de coniques possède une ligne bisingulière C_1 *et une ligne quartisingulière* C_2, *ou bien* C_2 *est une quartique et* C_1 *est d'ordre quelconque* (≥ 2); *ou bien* C_2 *est une quintique et* C_1 *est une conique, une cubique ou une quartique; ou enfin* C_1 *est une conique et l'ordre de* C_2 *est égal à six ou sept.*

27. Considérons en premier lieu une congruence linéaire formée par les coniques s'appuyant en quatre points sur une quartique gauche C_2 de première espèce et deux points sur une courbe C_1, d'ordre λ_1. Soit k le nombre des points d'appui de la courbe C_1 sur la quartique C_2.

La courbe C_2 est la base d'un faisceau de quadriques $|Q|$. Une quadrique Q de ce faisceau $|Q|$ contient toutes les coniques de la congruence passant par un quelconque de ses points (en dehors de C_2). Ces coniques sont en nombre simplement infini et forment par conséquent un faisceau, car autrement la congruence ne serait pas linéaire. Les plans des coniques situées sur la quadrique Q ont donc en commun une droite d. Lorsque la quadrique Q varie dans le faisceau $|Q|$, la droite d décrit une surface Ψ, la surface-enveloppe de la congruence..

Une quadrique Q rencontre la courbe C_1 en $2\lambda_1 - k$ points en dehors de C_2; par chacun de ces points passent des coniques de la congruence en nombre infini, et toutes ces coniques appartiennent à Q. On en conclut que les points d'intersection considérés sont aussi les points communs à la quadrique Q et à la droite d relative. Par suite $2\lambda_1 - k = 2$, c'est-à-dire $k = 2(\lambda_1 - 1)$. Les droites d sont des bisécantes de la courbe C_1 et celle-ci possédant une série linéaire d'ordre 2, est hyperelliptique.

Si dans un plan tangent à la surface Ψ se trouvent générale-

ment ν_1 coniques de la congruence, une même droite d de Ψ correspond à ν_1 quadriques du faisceau $|Q|$. Chaque droite d a $2\nu_1$ points communs avec la courbe C_1. Si $\nu_1 > 2$, cette courbe admet donc une infinité de $2\nu_1$ — sécantes. On a $2\nu_1 \leq \lambda_1$.

Reprenons les équations (1) et (2) du numéro 26; elles deviennent

$$4(n_1\nu_1)^2 + 2n_1\nu_1 + 1 = \lambda_1 q_1^2 + 4q_2^2 + \sigma,$$

$$2n_1\nu_1 + 1 = q_1 + 2q_2.$$

On a $q_1 = 1$, car un plan tangent à la surface Ψ ne contient qu'une conique de la congruence passant par un des points de C_1 situés dans le plan considéré. Par suite, $q_2 = n_1\nu_1$.

Nous distinguerons deux cas, suivant que la courbe C_1 est gauche ou plane.

a) C_1 est une courbe gauche, hyperelliptique, de genre π. Soit a_1 une droite qui forme, avec une infinité d'autres droites, des coniques dégénérées de la congruence. La courbe C_2 n'ayant ni quadrisécante ni trisécante, la droite a_1 est nécessairement une bisécante commune aux courbes C_1, C_2, dont les points d'appui sur ces courbes sont distincts. Un plan passant par a_1 contient une seule droite qui forme, avec a_1, une conique dégénérée de la congruence, donc a_1 est simple pour chaque surface **F**. Le nombre des droites analogues à a_1 est égal à $\lambda_1 - 2\pi - 1$ et l'on a $\sigma = \lambda_1 - 2\pi - 1$. On en déduit $n_1\nu_1 = \lambda_1 - \pi - 1$.

Si une congruence linéaire de coniques admet deux lignes singulières gauches dont une quartique de première espèce quartisingulière, la surface-enveloppe de la congruence est une réglée d'ordre n_1 *et la courbe bisingulière, d'ordre* λ_1, *est hyperelliptique (de genre* π), *s'appuie en* $2(\lambda_1 - 1)$ *points sur la quartique et rencontre chaque génératrice de la surface enveloppe en* $2\nu_1$ *points. La classe de la conguence est égale à* $n_1\nu_1$.

Un exemple de congruence linéaire pour lequel ν_1 est supérieur à un est donné par $\lambda_1 = 5$, $n_1 = 2_1$, $\nu_1 = 2$. On sait, en

effet, que sur une quadrique on peut tracer une courbe d'ordre cinq rencontrant toutes les génératrices d'un même système en quatre points (*).

b) C_1 est une courbe plane, hyperelliptique, de genre π.

Soit γ le plan de la courbe C_1. Les points d'intersection de C_2 avec γ sont des points multiples d'indice t pour C_1, et l'on a $\lambda_1 = 2t + 1$, $\pi \leq t$.

Dans le cas actuel, x est certainement nul, de sorte que l'on a $\lambda_1 = 2n_1\nu_1 + 1$, c'est-à-dire $n_1\nu_1 = t$. La surface-enveloppe Ψ devient une courbe de classe n_1 du plan γ.

Si une congruence linéaire de coniques possède une quartique gauche de première espèce quartisingulière et une courbe plane bisingulière, celle-ci est d'ordre $2t + 1$, *a quatre points multiples d'indice* t *sur la quartique, et est hyperelliptique de genre inférieur à* t.

Les congruences rencontrées dans ce numéro ont été signalées pour $\nu_1 = 1$ par M. Montesano (**). Quelques cas particuliers ont été étudiés par M. Pieri (***).

28. Considérons actuellement une congruence linéaire de coniques ayant une quartique gauche de seconde espèce C_2 quartisingulière et une courbe C_1, d'ordre λ_1, bisingulière ($\lambda_1 \geq 2$).

Soit k le nombre de points communs aux courbes C_1, C_2. La courbe C_1 ne peut se trouver sur la quadrique lieu des trisécantes de C_2, car alors la congruence de coniques serait d'ordre zéro ; donc $k \leq 2\lambda_1$.

Une trisécante a de C_2 s'appuyant sur C_1, forme, avec une

(*) BERTINI, *Sulle curve gobbe razionali del 5° ordine.* (In memoriam D. Chelini. COLLECTANEA MATHEMATICA. Milano, Hœpli, 1881, pp. 313-326.)

(**) *Sui varii tipi...* (LOC. CIT.)

(***) *Sopra alcune congruenze...* (LOC. CIT.)

droite s'appuyant sur a, C_1, C_2, une conique dégénérée de la congruence. Dans un plan passant par a se trouvent $\lambda_1 - 1$ droites formant avec a de pareilles coniques dégénérées, donc la droite a est multiple d'ordre $\lambda_1 - 1$ sur toute surface **F**. La surface **F** relative à un point P de a se scinde en deux surfaces dont l'une est le lieu des droites s'appuyant sur a, C_1 et C_2. La multiplicité de a pour cette dernière surface ne peut donc excéder $\lambda_1 - 1$. Cette multiplicité est égale au nombre de droites s'appuyant sur C_1, C_2 (en des points distincts) que l'on peut mener par P, c'est-à-dire à $4\lambda_1 - k - 3$. Ainsi $4\lambda_1 - k - 3 \leq \lambda_1 - 1$, c'est-à-dire $k \geq 3\lambda_1 - 2$.

S'il existe une trisécante de C_2 s'appuyant sur C_1, on doit donc avoir $2\lambda_1 \geq k \geqslant 3\lambda_1 - 2$, c'est-à-dire $\lambda_1 = 2$, $k = 4$. Il ne peut donc pas exister de telles trisécantes, c'est-à-dire $k = 2\lambda_1$.

Supposons qu'il existe une droite a' s'appuyant deux fois sur chacune des courbes C_1, C_2 (en des points distincts). Toute bisécante de C_2 s'appuyant sur a' forme avec cette droite une conique dégénérée de la congruence. Un plan passant par a' coupe encore C_2 en deux points, donc a' est simple pour toute surface **F**. Si nous construisons la surface **F** relative à un point de la droite a', nous voyons que cette surface se scinde en deux autres dont l'une est le lieu des bisécantes de C_2 s'appuyant sur a'. Par conséquent cette droite doit être simple pour cette dernière surface. Mais, d'autre part, par tout point de a' passent encore deux autres bisécantes de C_2 et la surface formée par ces bisécantes passe doublement par a'. Pour éviter toute contradiction, nous devons supposer que les courbes C_1, C_2 n'ont aucune bisécante commune (les points d'appui étant distincts). En utilisant un théorème classique de Halphen donnant le nombre de droites communes à deux congruences réglées, on trouve

$$6\pi = (\lambda_1 - 2)(\lambda_1 - 3),$$

π étant le genre de la courbe C_1.

Considérons les coniques passant par un point P_1 de C_1, elles rencontrent encore C_1 en un second point P_2 qui peut être mobile ou fixe.

Si le point P_2 est variable, nous avons une correspondance birationnelle entre les points de C_1 et les coniques de la congruence passant par P_1. Le lieu de ces coniques est une surface algébrique sur laquelle elles forment un faisceau, car la congruence est linéaire. Ce faisceau a un point-base P_1 et par conséquent, d'après un théorème de Lüroth, il est linéaire (*). Par suite $\pi = 0$.

Si le point P_2 est fixe, les coniques passant par P_1, P_2 engendrent une surface Π, d'ordre $\rho + 2$, passant ρ fois par la droite P_1P_2 et ayant des points multiples d'indice $\rho + 1$ en P_1, P_2. Mais, d'après un théorème de M. Bertini (**), « si la surface générique d'un système linéaire a un point multiple d'indice t variable, le lieu de ce point est une variété-base multiple d'indice $t - 1$ pour le système linéaire ». La surface Π engendre un faisceau lorsque P_1 varie sur C_1, car par tout point de l'espace passe une conique de la congruence déterminant deux points sur la courbe C_1, l'un de ces points pourra être pris pour P_1, l'autre pour P_2, mais chaque arrangement donnera évidemment la même surface Π. La droite P_1P_2 décrit une surface réglée qui ne peut faire partie de la base du faisceau des surfaces Π, donc $\rho \leq 1$. Les surfaces Π passant par C_2, si l'on a $\rho = 0$, cette courbe serait de première espèce (commune à une infinité de quadriques), ce qui a été exclu par hypothèse.

Lorsque $\rho = 1$, les surfaces Π sont du troisième ordre et passent par C_1, C_2, donc $\lambda_1 \leq 5$. Nous avons vu que $6\pi = (\lambda_1 - 2)(\lambda_1 - 3)$, donc pour $\lambda_1 = 5$, $\pi = 1$, pour $\lambda_1 = 4$,

---

(*) Voir par exemple Castelnuovo et Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.* Chap II, § 6, observation. (Annali di Matematica, 1901, 3e sér., t. VI, pp. 165-225.)

(**) Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi.* Chap. X, nº 8. Pisa, Spoerri, 1907.

$\pi = \frac{1}{3}$, pour $\lambda_1 = 2,3$, $\pi = 0$. Mais la courbe-intersection de deux surfaces cubiques est de genre dix, et par conséquent (*), si $\lambda_1 = 5$, $\pi = 3$, ce qui est en contradiction avec ce qui vient d'être dit. Le genre d'une courbe étant entier, le cas $\lambda_1 = 4$ doit aussi être rejeté, et nous voyons que dans chaque cas, que le point P_2 soit mobile ou non quand P_1 est fixé, on a $\pi = 0$, $\lambda_1 = 2, 3$.

Si $\lambda_1 = 2$, il existe une infinité de quadriques passant par la conique C_1 et par une conique quelconque de la congruence. Ces quadriques rencontrent C_2 en $k + 4 = 8$ points, donc il est possible de trouver une quadrique contenant C_1, C_2 et par conséquent toute conique de la congruence. Le cas $\lambda_1 = 2$ doit ainsi être exclu.

Lorsque $\lambda_1 = 3$, on a $k = 6$ et la courbe C_1 est une cubique gauche, car si c'était une cubique plane, elle aurait au moins deux points doubles sur C_2, ce qui est impossible.

Par treize points de C_2 et par quatre points de C_1 passent des surfaces cubiques formant un réseau et contenant les courbes C_1, C_2. Une conique quelconque de la congruence est située sur une infinité de ces surfaces cubiques. On en conclut que la congruence envisagée ici est un cas particulier de la congruence du numéro 23 (la courbe d'ordre sept et de genre cinq dégénère en deux courbes rationnelles C_1, C_2 ayant six points communs). La congruence est donc de classe un et les plans de ses coniques passent par un point fixe de C_1.

Si une congruence linéaire de coniques possède une quartique gauche de seconde espèce quartisingulière et une courbe bisingulière, celle-ci est une cubique gauche s'appuyant en six points sur la quartique, et la congruence est de classe un.

(*) Nous employons ici la formule $\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$ donnant le genre π d'une courbe composée de deux courbes de genres π_1, π_2 ayant i points communs. Pour des détails, consulter : ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche.* (ATTI DELLA R. ACCAD. DI TORINO, 1901, XXXVII.)

Comme vérification, si l'on fait $n_1 = \nu_1 = q_1 - q_2 = 1$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\sigma = 0$ dans les formules (1) et (2) du numéro 26, on trouve des identités.

29. Du théorème énoncé au numéro 26, on déduit que si une congruence linéaire de coniques possède une conique C_1 bisingulière et une courbe C_2 d'ordre λ_2 quartisingulière, on a $\lambda_2 = 4, 5, 6, 7$. Le cas $\lambda_2 = 4$ a déjà été examiné implicitement (n° 27), nous nous bornerons donc à étudier les cas $\lambda_2 = 5, 6, 7$.

Au début du paragraphe 2 de ce chapitre, nous avons fait correspondre à chaque congruence linéaire de coniques un système doublement infini de quadriques Φ relativement à un système linéaire quintuplement infini, choisi d'une façon arbitraire. Remarquons que toute conique d'une congruence linéaire ayant une conique bisingulière C_1 est située sur une quadrique d'un système linéaire triplement infini dont les éléments contiennent C_1. Ce nouveau système peut évidemment être substitué au système quintuplement infini et le système Φ sera formé par des quadriques contenant C_1. Si alors on construit la surface **F**, lieu des coniques de la congruence dont les plans passent par un point fixe, on voit que cette surface, d'ordre $2n_1\nu_1 + 1$, passe $n_1\nu_1$ fois par C_1. Les formules (1) et (2) du numéro 26 deviennent ainsi :

$$2(n_1\nu_1)^2 + 2(n_1\nu_1) + 1 = \lambda_2 q_2^2 + \sigma,$$
$$2q_2 = n_1\nu_1 + 1.$$

On en déduit

$$q_2 = \frac{1}{8 - \lambda_2}\left(2 \pm \sqrt{4 + (\sigma - 1)(8 - \lambda_1)}\right)$$

Un calcul simple montre que les solutions sont de la forme :

$$\lambda_2 = 7, \quad n_1\nu_1 = 2\varepsilon + 3, \quad q_2 = \varepsilon + 2, \quad \sigma = \varepsilon^2 - 3;$$
$$\lambda_2 = 6, \quad n_1\nu_1 = 2\varepsilon + 1, \quad q_2 = \varepsilon + 1, \quad \sigma = 2\varepsilon^2 - 1;$$
$$\lambda_2 = 5, \quad n_1\nu_1 = 2\varepsilon + 1, \quad q_2 = \varepsilon + 1, \quad \sigma = 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon,$$

ε étant, dans chaque cas, un nombre entier positif.

Supposons qu'il existe une trisécante a de C_2 s'appuyant sur la conique C_1. Cette droite est multiple d'ordre $\lambda_2 - 3$ pour chaque surface **F**, car elle forme une conique de la congruence avec une droite s'appuyant sur a, C_1, C_2. Or, le lieu de ces droites est une surface passant $2\lambda_2 - k - 3$ fois par a, k étant le nombre de points communs à C_1, C_2. Si l'on construit la surface **F** relative à un point de a, on voit que $2\lambda_2 - k - 3 \leq \lambda_2 - 3$, c'est-à-dire $k \geq \lambda_2$. Mais la courbe C_2 étant d'ordre λ_2, elle ne peut rencontrer le plan de C_1 en plus de λ_2 points, donc $k = \lambda_2$ (dans l'hypothèse où C_2 admet des trisécantes s'appuyant sur C_1).

Considérons une droite d et un point P. Les plans passant par d marquent sur C_2 les groupes d'un série linéaire $g^1_{\lambda_2}$, ceux qui passent par P marquent une série linéaire $g^2_{\lambda_2}$. D'après une formule de M. Schubert (*), le nombre de groupes de trois points communs à ces deux séries est égal à $\lambda_2 \binom{\lambda_2 - 1}{2} - (\lambda_2 - 2)(\lambda_2 + \pi - 1)$, π étant le genre de C_2. Ces groupes sont les groupes marqués par les trisécantes de C_2 s'appuyant sur d et les $\binom{\lambda_2}{3}$ groupes de trois points situés dans le plan joignant d et P. On en conclut que le lieu des trisécantes de C_2 est une surface d'ordre $\frac{1}{3}\lambda_2(\lambda_2 - 2)(\lambda_2 - 4) - (\lambda_2 - 2)(\pi - 1)$. Cette surface passe $\binom{\lambda_2 - 2}{2} - \pi$ fois par C_2, par conséquent, le nombre des trisécantes de C_2 s'appuyant sur C_1 est égal à $\frac{1}{6}(\lambda_2 - 2)[4\lambda_2^2 - (16 + 3k)\lambda_2 + 3(4 + 3k)] - \pi(2\lambda_2 - k - 4)$. Ce nombre doit être supérieur ou égal à zéro. S'il est supérieur à zéro, nous avons vu que l'on a $k = \lambda_2$. On vérifie facilement que cela est impossible (pour $k = \lambda_2$, on trouve un nombre négatif). On doit donc avoir

$$(\lambda_2 - 2)[4\lambda_2^2 - (16 + 3k)\lambda_2 + 3(4 + 3k)] = 6\pi(2\lambda_2 - k - 4),$$

(*) Une démonstration simple et élégante de la formule de M. Schubert a été donnée par M. Severi dans ses *Lezioni di Geometria Algebrica*. Padova, Draghi, 1908, pp. 236 et suivantes.

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de trisécante de C_2 s'appuyant sur C_1.

Les solutions en nombres entiers ($5 \leq \lambda_2 \leq 7$) de cette équations sont :

$$\lambda_2 = 7, \quad \pi = 5, \quad k = 6; \qquad \lambda_2 = 7, \quad \pi = 6, \quad k = 5;$$
$$\lambda_2 = 6, \quad \pi = 2, \quad k = 6; \qquad \lambda_2 = 6, \quad \pi = 4, \quad k = 4;$$
$$\lambda_2 = 5, \quad \pi = 1, \quad k = 5; \qquad \lambda_2 = 5, \quad \pi = 2, \quad k = 4.$$

Examinons ces cas séparément :

Une courbe d'ordre sept et de genre ≥ 5 n'admet pas de quadrisécante, donc si $\pi = 5$, $k_2 = 6$, $\lambda_2 = 7$, on a $\sigma = 0$, c'est-à-dire $\varepsilon^2 = 3$, équation impossible en nombre entier.

Si $\lambda_2 = 7$, $\pi = 6$, $k = 5$, les courbes C_1, C_2 ont une bisécante commune, multiple d'ordre 10 pour toute surface $\mathbf{F}$; donc $\sigma = 100$ et $\varepsilon^2 = 97$, équation impossible en nombre entier. On voit donc qu'il n'existe pas de congruence pour $\lambda_2 = 7$.

Lorsque l'on a $\lambda_2 = 6$, $\pi = 2$, $k = 6$, la courbe C_2 admet une seule quadrisécante a, et cette quadrisécante est simple pour toute surface $\mathbf{F}$. Par suite $\sigma = 1$, $\varepsilon = 1$, $n_1 \nu_1 = 5$, $q_2 = 2$. On a d'ailleurs $\nu_1 = 1$ et une première congruence.

Lorsque $\lambda_2 = 6$, $\pi = 4$, $k = 4$, la courbe C_2 n'admet pas de quadrisécante, mais elle admet une bisécante dans le plan de C_1. Cette droite est multiple d'indice 6 pour chaque surface $\mathbf{F}$ et on a $\sigma = 36$, c'est-à-dire $2\varepsilon^2 = 37$, ce qui est impossible.

Si $\lambda_2 = 5$, $\pi = 1$, $k = 5$, la courbe C_2 n'admettant pas de quadrisécante, on a $\sigma = 0$, c'est-à-dire $\varepsilon = 0$, $n_1 \nu_1 = 1$, $q_2 = 1$. Évidemment $\nu_1 = 1$, $n_1 = 1$.

Si enfin $\lambda_2 = 5$, $\pi = 2$, $k = 4$, on a $\sigma = 0$, $\varepsilon = 0$, $n_1 = 1$, $q_1 = 1$.

En résumé, nous avons trois congruences possibles :

a) $\lambda_2 = 6$, $n_1 = 3$, $\nu_1 = 1$, $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, $\sigma = 1$, $\pi = 2$, $k = 6$,
b) $\lambda_2 = 5$, $n_1 = 1$, $\nu_1 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $\sigma = 0$, $\pi = 1$, $k = 5$,
c) $\lambda_2 = 5$, $n_1 = 1$, $\nu_1 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $\sigma = 0$, $\pi = 2$, $k = 4$,

Nous avons déjà vu (n° 22) qu'il existe un faisceau de surfaces cubiques passant par la courbe C_2, d'ordre six et de genre deux, par la conique C_1 et par la quadrisécante a de C_2. Par un point P de l'espace passe une conique de la congruence a) et une surface cubique contenant ses courbes singulières; donc cette surface rencontre la conique en sept points et par suite la contient tout entière. Nous voyons ainsi que les coniques de la congruence a) se distribuent par faisceaux sur les surfaces cubiques d'un faisceau. Considérons une de ces surfaces. Les coniques de la congruence qu'elle contient sont dans les plans d'un faisceau dont l'axe appartient à la surface cubique et par suite s'appuie sur a et deux fois sur C_2. La surface-enveloppe de la congruence est donc le lieu des bisécantes de C_2 s'appuyant sur a. C'est une surface cubique passant doublement par a.

Passons à la congruence b). Par la conique C_1 et par une courbe quelconque de la congruence passent une infinité de quadriques formant un faisceau. Les dix points de rencontre de C_2 avec une quadrique de ce faisceau se répartissent en cinq points fixes sur C_1, quatre points fixes sur la conique de la congruence choisie, et enfin un point mobile. Il en résulte que les points de la courbe C_2 peuvent être rapportés birationnellement aux quadriques d'un faisceau, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\pi = 1$. La congruence b) n'existe donc pas.

Enfin, les surfaces **F** relatives à la congruence c) sont du troisième ordre et forment un réseau. Les plans des coniques de cette congruence passent par un point fixe P situé sur la courbe C_2 dans le plan de C_1, mais en dehors de cette courbe. En effet, une droite d passant par P et située dans le plan de C_1, forme, avec une trisécante de C_2 s'appuyant sur d, une conique de la congruence, et il existe une infinité de pareilles coniques dégénérées. La congruence c) est un cas particulier de la congruence du numéro 23. (La courbe d'ordre sept et de genre cinq dégénère en deux courbes C_1, C_2, l'une rationnelle, l'autre de genre deux, se coupant en quatre points.)

Si une congruence linéaire de coniques possède une conique bisingulière et une seconde quartisingulière d'ordre au moins égal à cinq, celle-ci est :

1° *Une courbe d'ordre six, de genre deux, s'appuyant en six points sur la conique, et la congruence est de classe trois ;*

2° *Une courbe d'ordre cinq, de genre deux, s'appuyant en quatre points sur la conique, et la congruence est de classe un.*

Ces congruences ont été signalées par MM. Pieri (*) et Montesano (**).

30. Il nous reste à examiner s'il peut exister une congruence linéaire formée par des coniques s'appuyant en quatre points sur une courbe C_2 d'ordre cinq et en deux points sur une courbe C_1 d'ordre trois ou quatre.

Supposons d'abord que C_1 est du troisième ordre, et soit k le nombre de points communs à C_1 et C_2.

S'il existe une trisécante a de C_2 s'appuyant sur C_1, elle forme une conique de la congruence avec toute droite s'appuyant sur a, C_1, C_2. Par conséquent, la droite a est quadruple pour chaque surface **F** ; mais elle est multiple d'ordre $12-k$ pour la surface engendrée par les droites s'appuyant sur a, C_1, C_2, donc $12-k\leq 4$, $k\geq 8$.

Les trisécantes de C_2 engendrent généralement une surface (sauf dans le cas où C_2 a un point triple), et cette surface est d'ordre $8-3\pi$, π étant le genre de la courbe C_2 (n° 29) ; cette surface passe $3-\pi$ fois par C_2, car le cône qui projette C_2 d'un de ses points est de genre π et a donc $3-\pi$ droites doubles. La courbe C_1 ne peut se trouver sur la surface lieu des trisécantes de C_2, donc $k\leq 3\frac{8-3\pi}{3-\pi}$. Les deux inégalités trouvées exigent $\pi=0$, $k=8$, et ainsi, dans l'hypothèse où il y a des trisécantes de C_2 s'appuyant sur C_1, et où les trisécantes de C_2 forment une surface, on trouve que la courbe C_1 rencontre

(*) *Sopra alc. congr...* (Loc. cit.)

(**) *Sui varii tipi...* (Loc. cit.)

cette surface seulement en des points de C_2 et que par conséquent on peut admettre qu'il n'y a pas de trisécante de C_2 s'appuyant sur C_1.

Dans cette nouvelle hypothèse, si $\pi \geq 1$, on doit avoir

$$3(8-3\pi) = k(3-\pi),$$

c'est-à-dire $\pi = 2$, $k = 6$. Si $\pi = 0$, la courbe C_2 (on exclut le cas où C_2 a un point triple) a ou une seule quadrisécante, quadruple pour la surface des trisécantes, ou une infinité de quadrisécantes formant une quadrique (*). Dans le premier cas, on trouve $k = 8$; dans le second, $k = 2\varepsilon$ et la courbe C_1 a $3-\varepsilon$ bisécantes s'appuyant quatre fois sur C_2, ε étant entier et positif.

Il nous reste à examiner le cas où la courbe C_2 a un point triple $P(\pi = \nu)$. On vérifie comme précédemment que l'existence d'une droite issue de P s'appuyant une seule fois sur C_1 est impossible, par suite, $k = 6$. Si C_1 est gauche, il existe une bisécante a de C_1 issue de P; cette droite forme, avec une droite issue de P et s'appuyant une seconde fois sur C_2, une conique dégénérée de la congruence.

Ainsi, les différentes congruences qui peuvent se présenter sont caractérisées par les faits suivants :

a) La courbe C_2 est de genre deux et C_1 s'appuie en six points sur C_2.

b) La courbe C_2 est rationnelle et admet une seule quadrisécante. C_1 rencontre C_2 en huit points et est donc une cubique gauche.

c) La courbe C_2 est rationnelle et admet ∞^1 quadrisécantes dont $3-\varepsilon$ sont des bisécantes de C_1; cette courbe s'appuie en 2ε points sur C_2.

d) La courbe C_2 a un point triple et s'appuie en six points sur C_1.

(*) Bertini, *Sulle curve gobbe...* (Loc. cit.)

Dans les hypothèses *a*), *c*) ($\varepsilon = 3$), *d*), la courbe C_1 pourrait être plane et avoir par suite un point double en un de ses six points d'appui sur C_2. Une conique de la congruence ne peut pas dégénérer en deux droites dont l'une soit dans le plan de C_1 ; par suite, chaque surface **F** rencontre ce plan seulement en des points de C_1 et, dans les équations (1), (2) du numéro 26, on aura $2n_1\nu_1 + 1 = 3q_1$. Cela amène à l'équation $3q_1 + x = 1$, impossible en nombres entiers tels que $q_1 \geq 1$. C_1 est donc toujours gauche.

Congruence *a*) : Les courbes C_1, C_2 ont une bisécante commune *a*, triple pour les surfaces **F**. La courbe C_2 se trouve sur ∞^5 surfaces cubiques formant un système linéaire (*), donc C_1, C_2 et *a* forment la base d'un faisceau de surfaces cubiques. Toute conique de la congruence est sur une de ces surfaces et les coniques situées sur une même surface forment un faisceau, car autrement la congruence ne serait pas linéaire. On en conclut que l'enveloppe Ψ des plans des coniques de la congruence est le lieu des droites s'appuyant sur C_1, C_2, *a*. C'est donc une surface du huitième ordre passant cinq fois par *a*, trois fois par C_1 et une fois par C_2.

Cherchons à évaluer q_1, c'est-à-dire la multiplicité d'un point Q de C_1 pour la surface **F**, lieu des coniques dont les plans passent par un point P. q_1 sera égal au nombre de droites de la surface-enveloppe Ψ s'appuyant sur la droite PQ, c'est-à-dire à cinq. De même, $q_2 = 7$. Mais nous avons trouvé $n_1 = 8$ et de plus on a $\nu_1 = 1$. Il est maintenant facile de voir que l'égalité (2)

$$2n_1\nu_1 + 1 = q_1 + 2q_2$$

du numéro (26) ne subsiste plus, de sorte que la congruence *a*) n'existe pas.

Congruence *b*) : Les courbes C_1, C_2 et la quadrisécante *a* de C_2 sont la base d'un faisceau de surfaces cubiques. En rai-

(*) Stuyvaert, *Cinq études* .. (Loc. cit., pp. 38 et suiv.)

sonnant comme précédemment, on voit que la surface-enveloppe Ψ est le lieu des droites s'appuyant sur a, C_1, C_2, c'est-à-dire une surface d'ordre dix passant sept fois par a, une fois par C_1 et trois fois par C_2. On en conclut que $q_1 = 9$, $q_2 = 7$ et la congruence *b*) n'existe pas pour la même raison que la congruence a).

Congruence *c*) : Si les courbes C_1, C_2 ont une bisécante commune a, celle-ci est triple pour chaque surface **F**, mais quintuple pour le lieu des bisécantes de C_2 s'appuyant sur a, de sorte qu'il ne peut exister de pareilles bisécantes. En évaluant le nombre des bisécantes communes à C_1, C_2 et en comptant chaque quadrisécante de C_2 bisécante de C_1 six fois, on ne trouve jamais zéro, de sorte que la congruence *c*) n'existe pas.

Congruence *d*) : Soit P le point triple de C_2, a la bisécante de C_1 issue de P. Par le point P, par dix points de C_1 et par sept points de C_2 différents de P passent ∞^1 surfaces cubiques formant un faisceau dont la base est composée par a, C_1 et C_2. Répétons le raisonnement déjà fait pour la congruence *a*); on voit que la surface-enveloppe Ψ est la surface du cinquième ordre ($n_1 = 5$) passant trois fois par a, deux fois par C_1 et une fois par C_2, lieu des droites s'appuyant sur a, C_1 et C_2. On a évidemment $\nu_1 = 1$. De plus, $q_1 = 3$, $q_2 = 4$ et la formule (2) du numéro 26 est possible.

La droite a est double pour chaque surface **F**, de sorte que $\sigma = 4$, et la formule (1) (n° 26) est également vérifiée.

Si une congruence linéaire de coniques possède une quintique quartisingulière et une cubique bisingulière, la quintique a un point triple, la cubique est gauche et s'appuie en six points sur la quintique. La congruence est de classe cinq.

Cette congruence a été rencontrée par M. Montesano (*).

(*) *Sui varii tipi...* (Loc. cit.)

31. Pour terminer l'énumération des congruences linéaires de coniques, admettant une courbe quartisingulière et une courbe bisingulière, il nous reste à examiner le cas $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$ (n° 26), le raisonnement présentant de grandes analogies avec celui du numéro précédent.

On commence par démontrer qu'il ne peut exister de trisécantes de C_2 s'appuyant sur C_1. Alors si C_2 n'est pas unicursale, il peut se présenter les trois cas suivant :

a) C_2 est de genre deux, C_1 de genre un et s'appuie huit fois sur C_2. Les deux courbes n'ont pas de bisécantes communes.

b) C_2 est de genre deux, C_1 est rationnelle et s'appuie en huit points sur C_2. Les deux courbes C_1, C_2 ont, si C_1 est gauche, quatre bisécantes communes.

c) C_2 est elliptique, C_1 est rationnelle et s'appuie en dix points sur C_2. Les deux courbes n'ont pas de bisécantes communes. C_1 est certainement gauche.

Lorsque C_2 est rationnelle et possède une seule quadrisécante *a*, la courbe C_1 doit s'appuyer en huit points sur C_2 et en deux points sur *a*. C_1 est certainement gauche, de plus cette courbe est rationnelle, car autrement C_1 et C_2 auraient un nombre négatif de bisécantes communes. Si C_1 est rationnelle, le nombre de ces bisécantes est égal à quatre. Donc :

d) C_2 est rationnelle ainsi que C_1, et cette courbe s'appuie huit fois sur C_2 et deux fois sur son unique quadrisécante ; de plus, les courbes ont quatre bisécantes communes.

Si C_2 admet une infinité de quadrisécantes (formant une quadrique), on n'obtient pas de congruence pour les raisons déjà invoquées dans le cas analogue au numéro 30.

Enfin, nous avons un cinquième cas :

e) C_2 a un point triple et C_1 s'appuie en huit points sur C_2.

Comme précédemment (n° 30), on peut démontrer que la courbe C_1 ne peut pas être plane.

L'hypothèse *a*) est à rejeter, car les courbes C_1, C_2 sont la

base d'un faisceau de surfaces cubiques (*). On trouve alors $n_1 = 16$, $\nu_1 = 1$, $q_1 = 9$, $q_2 = 14$, ce qui est incompatible avec l'équation (2) du numéro 26.

Dans l'hypothèse *b*), par la courbe du quatrième ordre C_1, par C_2 et par les bisécantes communes aux deux courbes, il passe une surface cubique Π. Celles des coniques de la congruence situées sur cette surface sont en nombre simplement infini et y forment évidemment un faisceau. Les plans des coniques de ce faisceau passent par une droite *d* s'appuyant deux fois sur C_1, une fois sur C_2. Mais les bisécantes de C_1 s'appuyant sur une section plane C_3 de Π forment une surface d'ordre quinze passant cinq fois par C_1 et trois fois par C_3. Cette surface rencontre C_2 en dehors de C_1, de C_3 et des bisécantes communes à C_1, C_2, en douze points; donc il y a douze droites de la surface Π, bisécantes de C_1 et sécantes de C_2. Par suite, par un point quelconque de Π passent douze coniques de la congruence, et celle-ci n'est pas linéaire. L'hypothèse *b*) est donc à rejeter.

L'hypothèse *c*) est aussi à rejeter, car les courbes C_1, C_2 suivent la base d'un faisceau de surfaces cubiques qui comprennent toutes les coniques de la congruence. On trouve $n_1 = 15$, $\nu_1 = 1$, $q_1 = 10$, $q_2 = 9$, ce qui est incompatible avec l'équation (2) du numéro 26.

Dans l'hypothèse *d*), chacune des bisécantes communes à C_1, C_2 est triple pour chaque surface **F**, mais quintuple pour le lieu des bisécantes de C_2 s'appuyant sur elle; donc l'hypothèse doit être rejetée.

Enfin, dans l'hypothèse *e*), on a une surface cubique ayant un point double au point triple de C_2 et contenant les courbes C_1, C_2. Le même raisonnement qui a servi pour rejeter l'hypothèse *b*) permet de rejeter également l'hypothèse *e*).

On voit ainsi qu'il n'existe pas de congruence linéaire de coniques ayant une quintique quartisingulière et une quartique bisingulière.

(*) Stuyvaert, *Cinq études...* (Loc. cit., pp. 38 et suiv.)

§ 5. — *Congruences linéaires de coniques ayant un point principal.*

32. Nous avons exclu précédemment le cas où la congruence linéaire examinée possède un point principal (n° 20); nous allons maintenant reprendre cette hypothèse.

Soit Γ une congruence linéaire de coniques possédant un point principal O, c'est-à-dire que toutes les coniques de la congruence passent par O (*). En conservant les notations du § 2 (ch. III), on a $n_1 = 1$.

La surface **F**, lieu des coniques de la congruence Γ dont les plans passent par un point P, passe simplement par la droite PO, puisque la congruence est linéaire. Un plan passant par PO contient ν_1 coniques de la congruence, donc l'ordre de **F** est $2\nu_1 + 1$. D'autre part, **F** passe $\nu_1 + 1$ fois par O, car une droite partant de ce point ne rencontre plus la surface **F** qu'en ν_1 points.

La surface lieu des coniques de la congruence dont les plans passent par un point de l'espace, est d'ordre $2\nu_1 + 1$ *et passe* $\nu_1 + 1$ *fois par le point principal.*

Supposons que les coniques de la congruence Γ s'appuient m_1 fois sur une courbe C_2 d'ordre λ_2, ..., m_k fois sur une courbe C_k d'ordre λ_k, avec

$$m_1 + m_2 + \ldots + m^k = 4. \qquad (1)$$

Les courbes C_1, C_2, ..., C_k appartiendront aux surfaces **F** avec les multiplicités respectives q_1, q_2, ..., q_k.

(*) Les congruences possédant deux points principaux ont été examinées plus haut (chap. III, § 2, congruences de la première catégorie).

Les droites qui forment des coniques dégénérées de la congruence Γ avec une infinité d'autres droites appartiennent à toutes les surfaces **F**. De pareilles droites sont nécessairement des droites issues de O et s'appuyant en deux points (en dehors de O) sur l'ensemble des courbes singulières. Si dans un plan mené par une de ces droites a se trouvent α droites formant avec a des coniques dégénérées de la congruence, la droite a est multiple d'ordre α sur chaque surface **F**. Nous supposerons qu'il existe p droites a_1, a_2, ..., a_p analogues à a et nous indiquerons par α_1, α_2, ..., α_p leurs multiplicités respectives pour les surfaces **F**. On posera

$$\sigma = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2. \tag{2}$$

Deux surfaces **F** ont en commun, outre les courbes C_1, C_2, ..., C_k et les droites $a_1, a_2, \ldots, a_p$, ν_1 coniques de la congruence, donc on a, pourvu qu'il n'y ait pas de droite singulière à coniques infiniment voisines (*),

$$(2\nu_1 + 1)^2 = 2\nu_1 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i^2 + \sigma. \tag{3}$$

Les intersections d'une surface **F** et d'une conique de la congruence n'appartenant pas à cette surface ont lieu au point O ou sur les courbes singulières C_1, C_2, ..., C_k; donc

$$3\nu_1 + 1 = \sum_{i=1}^{k} m_i q_i. \tag{4}$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) permettent d'étudier les congruences linéaires de coniques ayant un point principal. Nous déterminerons ici celles qui possèdent une courbe C d'ordre λ, quartisingulière ($m_1 = 4$).

(*) Voir Montesano, *Sui varii tipi...* (Loc. cit.)

33. Si la congruence Γ possède un point principal O et une courbe quartisingulière C, les équations (5), (4) deviennent

$$(2\nu_1 + 1)^2 = 2\nu_1 + \lambda q^2 + \sigma, \tag{5}$$

$$4q = 3\nu_1 + 1. \tag{6}$$

L'élimination de ν_1 entre ces deux équations donne

$$q^2(64 - 9\lambda) = 8q - 7 + 9\sigma.$$

On a $q \geq 1$, donc le second membre est positif et l'on doit avoir $9\lambda < 64$, c'est-à-dire $\lambda \leq 7$. On a évidemment $\lambda \geq 4$, donc :

Si une congruence linéaire de coniques possède un point principal et une courbe quartisingulière, celle-ci est d'ordre 4, 5, 6 ou 7.

Dans le cas où la courbe C est d'ordre 4, on a nécessairement $\nu_1 = 1$, d'où $q = 1$ et par suite $\sigma = 3$. On en conclut que l'on peut mener trois cordes de C pour un point extérieur et que C est donc une biquadratique de seconde espèce.

Si une congruence linéaire de coniques possède un point principal et une biquadratique gauche quartisingulière, celle-ci est de seconde espèce.

34. Considérons une congruence linéaire de coniques ayant un point principal O et une quintique C quartisingulière.

Si C passe par O, on a nécessairement $\nu_1 = 1$, d'où $q = 1$, $\sigma = 2$. Une droite a passant par O et s'appuyant encore deux fois sur C est évidemment simple sur les surfaces $\mathbf{F}$ ($\alpha = 1$); donc par un point de C passent deux trisécantes de cette courbe et elle est elliptique.

Si C ne passe pas par O et ne possède pas de point triple, une corde a de C, issue de O, est triple pour chaque surface $\mathbf{F}$,

de sorte que l'on a $\sigma = 6 . 9$, ou $x = 5 . 9$ ou enfin $\sigma = 4 . 9$. Alors les équations (5), (6) sont impossibles en nombres entiers.

Si C possède un point triple P et ne passe pas par O, une des trois cordes de cette courbe passant par O est triple pour chaque surface **F**, et la droite OP est double pour ces surfaces, donc $\sigma = 31$. Les équations (5), (6) donnent alors $q = 4$, $\nu_1 = 5$.

Si une congruence linéaire de coniques possède un point principal et une quintique quartisingulière, celle-ci est :

1° *elliptique, passe par* O *et la congruence est de classe un;*

2° *rationnelle, a un point triple et la congruence est de classe cinq.*

35. Considérons maintenant une congruence linéaire de coniques possédant un point principal O et une sextique C quartisingulière.

On a $\nu_1 \leq 15$. Les solutions en nombres entiers des équations (5), (6) satisfaisant à cette inégalité et telles que $\lambda = 6$, sont

a) $\nu_1 = 1, \quad q = 1, \quad \sigma = 1,$

b) $\nu_1 = 5, \quad q = 4, \quad \sigma = 15,$

c) $\nu_1 = 9, \quad q = 7, \quad \sigma = 49,$

d) $\nu_1 = 13, \quad q = 10, \quad \sigma = 103.$

Supposons que la courbe C passe t fois par O ($t \leq 2$). Les droites a, qui forment des coniques de la congruence, peuvent être de trois espèces. Si a est une bisécante de C issue de O, elle est multiple d'ordre $\frac{1}{2}(4 - t)(3 - t)$ pour chaque surface **F**; si c'est une droite joignant O à un point triple de C,

elle est multiple d'indice $\frac{1}{2}(3-t)(2-t)$ pour les surfaces **F**; enfin, si c'est une droite joignant O à un point quadruple de C, elle est multiple d'ordre $\frac{1}{2}(2-t)(1-t)$ pour les **F**. Soient respectivement k_1, k_2, k_3 les nombres de pareilles droites. On a

$$k_1(4-t)^2(3-t)^2+k_2(3-t)^2(2-t)^2+k_3(2-t)^2(1-t)^2=4\sigma. \quad (7)$$

La courbe C ne pouvant être rencontrée par un plan en plus de six points, on a l'inégalité

$$3k_2+4k_3+t\leqslant 6. \quad (8)$$

D'autre part, le cône projetant C du point O est d'ordre $6-t$ et possède k_1 droites doubles, k_2 droites triples et k_3 droites quadruples. Si $\pi \geq 0$ est le genre de C, on a

$$(5-t)(4-t)=2\pi+2k_1+6k_2+12k_3. \quad (9)$$

Dans l'hypothèse *a*), $\sigma=1$ et on a $t=2$, $k_1=1$, $k_2=k_3=0$, $\pi=2$.

Dans l'hypothèse *b*), $\sigma=15$; les solutions entières fournies par (7) ne satisfont jamais à (8) et (9). Cette hypothèse doit donc être rejetée. Des calculs analogues montrent qu'il en est de même des hypothèses *c*), *d*). Par suite :

Si une congruence linéaire de coniques possède un point principal et une sextique quartisingulière, celle-ci est de genre deux et passe deux fois par le point principal. La congruence est de classe un (*).

36. Examinons enfin le cas où la congruence linéaire possède un point principal O et une courbe quartisingulière du septième ordre C.

(*) Cette congruence n'est pas signalée par M. Montesano.

Les solutions en nombres entiers et positifs des équations

$$4\nu_1^2 + 2\nu_1 + 1 = 7q^2 + \sigma,$$
$$4q = 3\nu_1 + 1$$

sont

$$q = 3\varepsilon + 1, \qquad \nu_1 = 4\varepsilon + 1, \qquad \sigma = \varepsilon(\varepsilon - 2),$$

ε étant un entier positif. On a $\nu_1 \leq 21$, d'où $\varepsilon \leq 5$.

Soient t la multiplicité de O pour C, n le genre de C, k_1 le nombre de droites issues de O s'appuyant encore deux fois sur C, k_2, k_3, k_4 respectivement les nombres des points triples, quadruples et quintuples de C en dehors de O. On doit avoir :

$$k_1(5-t)^2(4-t)^2 + k_2(4-t)^2(3-t)^2 + k_3(3-t)^2(2-t)^2 + k_4(2-t)^2(1-t)^2 = 4\varepsilon(\varepsilon-2),$$
$$3k_2 + 4k_3 + 5k_4 \leqslant 7, \qquad 4k_3 + 5k_4 + t \leqslant 7,$$
$$(6-t)(5-t) = 2\pi + 2k_1 + 6k_2 + 12k_3 + 20k_4.$$

Les solutions entières et positives de ces équations donnant $\varepsilon \leq 5$ sont :

a) $k_1=k_2=k_3=k_4=0$, $t=3$, $\pi=3$, $\varepsilon=0$, $\sigma=0$, $\nu_1=1$, $q=1$,
b) $k_1=k_2=k_3=k_4=0$, $t=2$, $\pi=6$, $\varepsilon=2$, $\sigma=0$, $\nu_1=9$, $q=7$.

Dans chacun de ces cas, la surface des trisécantes de la courbe C existe effectivement, et cette surface passe quatre fois dans le cas *a*), trois fois dans le cas *b*) par le point principal O, ce qui est incompatible avec $\sigma = 0$. Donc :

Si une congruence linéaire de coniques admet un point principal et une courbe quartisingulière, celle-ci est :

1° *Une quartique gauche de seconde espèce ;*
2° *Une quintique elliptique passant par le point principal ;*
3° *Une quintique rationnelle dotée d'un point triple ;*
4° *Une sextique de genre deux passant doublement par le point principal.*

THÈSES ANNEXÉES.

I. L'énumération des congruences linéaires de courbes gauches d'ordre quelconque n peut se faire par la considération des surfaces engendrées par les courbes de cette congruence s'appuyant sur les droites de l'espace, et par le calcul de certains nombres finis de courbes d'ordres inférieurs à n.

II. La considération du lieu des points de rebroussement de Segre des courbes d'un système linéaire quadruplement infini, situé sur une surface algébrique, peut donner deux invariants arithmétiques relatifs de la surface.

III. La considération des matrices dont les éléments sont des formes à deux séries de variables peut donner des résultats intéressants dans la théorie des coïncidences (couples de connexes).

IV. L'énumération des congruences linéaires de coniques s'appuyant sur les arêtes d'un trièdre peut être facilitée par la considération des surfaces de Steiner et des cônes du second ordre passant respectivement deux fois et une fois par les arêtes du trièdre considéré.

V. Le concept d'isomorphisme holoédrique de deux groupes continus et finis, s'établit en rapportant projectivement les transformations infinitésimales d'un groupe à celles de l'autre. La considération de deux groupes continus et finis dont les transformations infinitésimales sont en correspondance crémonienne peut aussi fournir des résultats intéressants.

Addition au chapitre premier.

Ce travail était terminé lorsque j'ai eu connaissance d'un Mémoire de M. Scherrer (*), dans lequel cet auteur représente une conique de l'espace par l'équation

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} a_{ik}u_iu_k = 0,$$

sous la condition

$$|a_{ik}| = 0, \qquad (i,k = 1, 2, 3, 4)$$

les (u) étant les coordonnées tangentielles de l'espace. La géométrie de la conique dans l'espace revient alors à la géométrie sur une hypersurface du quatrième ordre d'un espace linéaire à neuf dimensions.

Liége, 20 juin 1911.

(*) Otto Scherrer, *Ueber Kegelschnitte im Raum.* Programm. Frauenfeld, 1900.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

CHAPITRE PREMIER. — *Aperçu des recherches antérieures* 5

§ 1. — Les recherches de géométrie énumérative . . . 5

§ 2. — Les recherches de géométrie analytico-projective. 15

Index bibliographique 19

CHAPITRE II. — *La géométrie de la conique dans l'espace* 23

§ 1. — La représentation analytique de la conique. . . 23

§ 2. — Interprétation hyperspatiale 26

CHAPITRE III. — *Les congruences de coniques* 30

§ 1. — Généralités 30

§ 2. — Sur les congruences linéaires de coniques . . . 33

§ 3. — Congruences linéaires de coniques ayant une courbe sextisingulière 43

§ 4. — Congruences linéaires de coniques ayant une courbe quartisingulière 55

§ 5. — Congruences linéaires de coniques ayant un point principal 72

Thèses annexées 78

Addition au chapitre premier 79

SUR LA RÉSOLUTION

EN

NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS

DE

L'ÉQUATION $ax + by = c$

PAR

G. CESÀRO

Membre de l'Académie royale de Belgique,
Professeur de cristallographie à l'Université de Liége.

SUR LA RÉSOLUTION

EN

NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS

DE

L'ÉQUATION $ax + by = c$

Le but de cette note est de faire connaître un théorème conduisant à une méthode aisée et uniforme pour la résolution de l'équation $ax + by = c$ en nombres entiers et positifs (*).

Je reprends d'abord la démonstration de la règle qui donne le nombre de ces solutions.

*
* *

L'énoncé habituel : « Le nombre de solutions entières et positives est l'un des quotients entiers de la division de c par ab (**) » n'est pas exact : il suffit, pour s'en convaincre, d'examiner par exemple l'équation

$$2x + 3y = 12,$$

dans laquelle

$$\frac{c}{ab} = 2,$$

(*) a, b, c entiers positifs premiers entre eux, a et b premiers entre eux.

(**) Falisse et Graindorge. *Traité d'algèbre élémentaire*. Seconde partie; pp. 100-101.

et qui, cependant, n'admet qu'*une* solution :

$$x = 3, \qquad y = 2.$$

Ce défaut d'exactitude provient de ce que dans la démonstration habituelle on suppose que les limites

$$\frac{A}{b} \text{ et } -\frac{B}{a},$$

entre lesquelles doivent être comprises les valeurs de t, sont des nombres fractionnaires et que l'on n'envisage pas le cas où l'une de ces limites est entière, ni celui où les deux limites sont des entiers.

* * *

En rectifiant la démonstration, on arrive à l'énoncé suivant :

1° Si c est divisible à la fois par a et par b, le nombre de solutions entières et positives est

$$\frac{c}{ab} - 1.$$

2° Si c est divisible par l'un des coefficients a ou b et non par l'autre, le nombre de solutions égale le *quotient par défaut* de la division de c par ab.

3° Si c n'est divisible ni par a ni par b, le nombre de solutions est l'un des quotients entiers de la division de c par ab.

* * *

On peut arriver à ces résultats par la méthode habituelle précisée : $x = A$, $y = B$ étant une solution entière, les solutions générales sont

$$x = A - bt$$
$$y = B + at.$$

En outre, pour que x et y soient positifs, les valeurs entières de t doivent satisfaire aux relations

$$\begin{aligned} t &< \frac{A}{b} \\ t &> -\frac{B}{a} \end{aligned} \qquad (1)$$

Ces limites ne sont jamais contradictoires, car de

$$Aa + Bb = c > 0 \qquad (2)$$

on déduit

$$\frac{A}{b} > -\frac{B}{a},$$

mais il peut se faire qu'elles ne comprennent pas un entier. Le nombre de solutions entières et positives est celui des entiers satisfaisant aux relations (1).

Premier cas. — $.c$ est divisible par a et par b.

A cause de la relation (2), b, divisant c, doit diviser Aa et par conséquent A, vu qu'il est premier avec a; la première limite de t est donc entière et il en est de même de la seconde; on a donc

$$\frac{A}{b} = M, \qquad -\frac{B}{a} = N,$$

M et N étant des entiers positifs ou négatifs. Les valeurs de t qui satisfont à (1) sont

$$t = N + 1,\ N + 2, \ldots, M - 1,$$

et leur nombre (*), qui est celui des solutions entières et positives, est

$$M - N - 1 = \frac{A}{b} + \frac{B}{a} - 1 = \frac{c}{ab} - 1.$$

Deuxième cas. — $.c$ est divisible par a et non par b.

Ici la seconde limite de t est encore entière, tandis que la première est un nombre fractionnaire,

$$\frac{A}{b} = M + \frac{r}{b}, \qquad -\frac{B}{a} = N,$$

M étant le quotient par défaut de la division de A par b, de sorte que M est un entier positif ou négatif et r un reste positif. Les valeurs de t, qui correspondent à des solutions entières et positives, sont

$$t = N + 1, \ldots, M,$$

et le nombre de ces solutions est

$$M - N = \frac{c}{ab} - \frac{r}{b};$$

ce nombre de solutions est donc un entier qui diffère de $\frac{c}{ab}$ de moins d'une unité et, comme il est plus petit que $\frac{c}{ab}$, il représente *le quotient par défaut de cette division.*

(*) Le nombre d'une suite d'entiers consécutifs

$$a,\ a+1,\ \ldots,\ b,$$

est

$$b - a + 1.$$

Troisième cas. — $.c$ n'est divisible ni par a ni par b.

Dans ce cas les deux limites de t sont toutes les deux des nombres fractionnaires. Soit N l'entier immédiatement inférieur à $-\frac{B}{a}$ dans l'échelle des grandeurs, M l'entier immédiatement inférieur à $\frac{A}{b}$,

$$-\infty \ldots N, \; -\frac{B}{a}, \; \ldots M, \; \frac{A}{b}, \; \ldots +\infty,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{A}{b} &= M + \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{B}{a} &= N + \frac{1}{\beta}, \end{aligned} \qquad (3)$$

$\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ étant des *nombres positifs plus petits que l'unité.* Les valeurs de t, qui donnent des solutions entières et positives, sont

$$t = N + 1, \; N + 2, \ldots M;$$

le nombre de ces solutions est donc

$$M - N.$$

Or, en soustrayant membre à membre les (3), il vient

$$\frac{c}{ab} = M - N + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right);$$

$\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ étant des fractions positives plus petites que l'unité, leur différence $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$ est un nombre, positif ou négatif (*), plus petit que l'unité.

(*) $\frac{1}{\alpha}$ diffère nécessairement de $\frac{1}{\beta}$, vu que $\frac{c}{ab}$ est un nombre fractionnaire.

Donc M — N est un entier différant du nombre fractionnaire $\frac{c}{ab}$ de moins d'une unité ; c'est, par conséquent, un des quotients entiers de la division de c par ab.

* * *

Les deux premiers cas peuvent être traités plus simplement comme il suit :

Premier cas. — Supposons c divisible par a et par b, et par conséquent par ab. En posant

$$\frac{c}{ab} = q,$$

on voit que l'équation à résoudre

$$ax + by = qab,$$

admet comme solution particulière

$$x = qb, \quad y = 0$$

et que ses solutions générales sont

$$x = qb - bt$$
$$y = at.$$

Pour que les nombres x et y soient positifs, il faut que

$$t < q$$
$$t > 0.$$

Il existe donc $q - 1$ solutions entières et positives correspondant à

$$t = 1, 2, \ldots q - 1.$$

Ces solutions sont :

$$x = (q-1)b, \quad (q-2)b, \ldots, b$$
$$y = \quad a \quad , \quad 2a \quad , \ldots, (q-1)a.$$

Deuxième cas. — Supposons c divisible par a et non par b. En posant

$$\frac{c}{a} = k,$$

on voit que l'équation proposée

$$ax + by = ak$$

a pour solutions entières

$$x = k - bt$$
$$y = at.$$

Pour que x et y soient positifs, il faut que

$$t < \frac{k}{b} = \frac{c}{ab} = q + \frac{1}{\alpha}$$
$$t > 0.$$

De l'hypothèse suit que $\frac{c}{ab}$ est un nombre fractionnaire, et, si q est sa valeur à moins d'une unité près par défaut, les valeurs de t qui correspondent à des solutions entières et positives sont

$$t = 1, 2, \ldots, q,$$

et l'on voit que le nombre de ces solutions est le *quotient par défaut* de c par ab.

THÉORÈME.

Si l'on développe en fraction continue le rapport $\frac{a_1}{a_2}$ *des coefficients de l'équation*

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c, \qquad (1)$$

en désignant par a_1 *celui des coefficients qui donne un rang pair à la réduite* $\frac{a_1}{a_2}$, *si* $\frac{m_1}{m_2}$ *est l'avant-dernière réduite,* q *le quotient par défaut,* r *le reste de la division de* c *par* a_1a_2, *si l'on effectue les divisions*

$$\begin{array}{c|c} m_1r & a_1 \\ \hline \rho_1 & Q_1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} m_2r & a_2 \\ \hline \rho_2 & Q_2 \end{array}$$

suivant que les quotients de ces divisions seront égaux ou différeront d'une unité, le nombre de solutions entières et positives de l'équation proposée sera q *ou* $q + 1$.

En outre, les plus petites valeurs de x_1 *et* x_2, *qui entrent dans la composition des solutions entières et positives, sont*

$$x_1 = \rho_2 \quad \text{et} \quad x_2 = a_1 - \rho_1.$$

On suppose que c *n'est divisible ni par* a_1 *ni par* a_2.

En effet : de

$$m_2a_1 - m_1a_2 = 1,$$

on déduit pour les solutions entières de (1),

$$\begin{aligned} x_1 &= m_2c - a_2t \\ x_2 &= -m_1c + a_1t. \end{aligned} \qquad (2)$$

Pour que ces solutions soient positives, il faut donner à t des valeurs entières satisfaisant aux relations

$$t < \frac{m_2c}{a_2} = \frac{m_2(a_1a_2q + r)}{a_2} = m_2a_1q + \frac{m_2r}{a_2}$$

$$t > \frac{m_1c}{a_1} = \frac{m_1(a_1a_2q + r)}{a_1} = m_1a_2q + \frac{m_1r}{a_1}.$$

Considérons à présent l'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 = r, \qquad (3)$$

ayant évidemment pour solutions générales

$$x_1 = m_2r - a_2\theta$$
$$x_2 = -m_1r + a_1\theta.$$

Pour que ces valeurs soient positives, il faut donner à θ les valeurs entières satisfaisant aux relations

$$\theta < \frac{m_2r}{a_2} = Q_2 + \frac{\rho_2}{a_2} \text{ (*)}$$

$$\theta > \frac{m_1r}{a_1} = Q_1 + \frac{\rho_1}{a_1};$$

ces valeurs de θ sont

$$\theta = Q_1 + 1,\ Q_1 + 2, \ldots, Q_2;$$

le nombre de ces valeurs, qui est donc le nombre de solutions entières et positives de l'équation (3), est

$$N_r = Q_2 - Q_1;$$

et, comme le nombre de ces solutions est 0 ou 1, on doit avoir

$$Q_2 = Q_1 \quad \text{ou} \quad Q_2 = Q_1 + 1.$$

(*) $\frac{m_2r}{a_2}$ est évidemment un nombre fractionnaire, car si a_2 divisait m_2r, étant premier avec m_2, il devrait diviser r et par conséquent c, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en est de même pour $\frac{m_1r}{a_1}$.

Les limites de t relatives à l'équation (1) peuvent s'écrire

$$t < m_2 a_1 q + Q_2 + \frac{\rho_2}{a_2}$$

$$t > m_1 a_2 q + Q_1 + \frac{\rho_1}{a_1};$$

les valeurs de t qui satisfont à ces relations sont

$$t = m_1 a_2 q + Q_1 + 1, \ldots, m_2 a_1 q + Q_2; \qquad (4)$$

le nombre de ces valeurs, qui est le nombre de solutions entières et positives de l'équation (1), est

$$N_c = q(m_2 a_1 - m_1 a_2) + Q_2 - Q_1 = q + N_r.$$

On voit donc que le nombre de solutions de l'équation en c égale le nombre de solutions de l'équation en r plus le quotient par défaut de la division de c par $a_1 a_2$; N_c égalera donc q ou $q + 1$, suivant que N_r sera 0 ou 1, c'est-à-dire suivant que les quotients Q_1 et Q_2 seront égaux ou différeront d'une unité.

Calculons la plus petite valeur entière et positive de x_1, en remplaçant dans (2) t par la plus grande valeur comprise dans la série (4)

$$t = m_2 a_1 q + Q_2;$$

il vient

$$\begin{aligned} x_1 &= m_2(a_1 a_2 q + r) - a_2(m_2 a_1 q + Q_2) \\ &= m_2 r - a_2 Q_2 \\ &= \rho_2. \end{aligned}$$

Ainsi : *la plus petite valeur entière et positive de* x_1 *est le reste de la division de* $m_2 r$ *par* a_2.

De même, on obtient pour la plus petite valeur de x_2,

$$\begin{aligned} x_2 &= -m_1(a_1 a_2 q + r) + a_1(m_1 a_2 q + Q_1 + 1) \\ &= -m_1 r + a_1 Q_1 + a_1 \\ &= a_1 - \rho_1. \end{aligned}$$

Ainsi : *la plus petite valeur entière et positive de* x_2 *est le reste par excès de la division de* $m_1 r$ *par* a_1.

*
* *

Si l'on désigne, comme ci-dessus, par N_c le nombre de solutions entières et positives de l'équation (1), ces solutions sont

$$x_1 = \rho_2 \quad , \quad \rho_2 + a_2, \ldots\ldots, \rho_2 + (N_c - 1)a_2$$
$$x_2 = N_c a_1 - \rho_1, \ldots\ldots, 2a_1 - \rho_1, \; a_1 - \rho_1.$$

Dans ces formules N_c représente donc q ou $q + 1$ suivant que $Q_2 = Q_1$ ou $Q_1 + 1$.

*
* *

Lorsque l'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = r \qquad (3)$$

admet une solution entière et positive, celle-ci se compose précisément des deux plus petites valeurs relatives à l'équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 = c$, c'est-à-dire que cette solution est

$$x_1 = \rho_2$$
$$x_2 = a_1 - \rho_1.$$

Il suffit de démontrer pour cela que cet ensemble vérifie l'équation (3). Or, de

$$m_1 r = a_1 Q_1 + \rho_1$$
$$m_2 r = a_2 (Q_1 + 1) + \rho_2,$$

on tire, par l'élimination de Q_1,

$$a_1 \rho_2 + a_2 (a_1 - \rho_1) = r.$$

Donc, etc.

Exemples.

*
* *

$$47x + 121y = 21673.$$

En développant $\frac{121}{47}$ en fraction continue, on obtient

	2	1	1	2	1	6
121	47	27	20	7	6	1
27	20	7	6	1	0	

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{3}{1}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{13}{5}, \quad \frac{18}{7}, \quad \frac{121}{47}.$$

La dernière réduite est de rang pair; nous écrivons donc

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{121}{47}, \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{18}{7},$$

l'équation proposée devant s'écrire

$$121x_1 + 47x_2 = 21673.$$

On a ensuite

$$\begin{array}{r|l} 21673 & a_1a_2 = 5687 \\ r = 4612 & q = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} m_1r = 83016 & 121 \\ \rho_1 = 10 & Q_1 = 686 \end{array}, \qquad \begin{array}{r|l} m_2r = 32284 & 47 \\ \rho_2 = 42 & Q_2 = 686 \end{array}.$$

Les quotients Q_1 et Q_2 étant égaux, il s'ensuit que le nombre de solutions entières et positives est $q = 3$; les plus petites valeurs de x_1 et x_2 sont

$$x_1 = \rho_2 = 42 \quad \text{et} \quad x_2 = a_1 - \rho_1 = 111.$$

Les trois solutions sont

$$\begin{aligned} x_1 &= \underline{42}, \quad 89, \quad 136 = y \\ x_2 &= 353, \quad 232, \quad \underline{111} = x. \end{aligned}$$

* * *

$$17x + 13y = 1369$$

	1	3	4
17	13	4	1
4	1	0	

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{17}{13}.$$

La dernière réduite étant de rang impair; nous écrirons

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{13}{17}, \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{4}$$

$$13x_1 + 17x_2 = 1369,$$

$$\begin{array}{r|l} 1369 & a_1a_2 = 221 \\ \hline r = 43 & q = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} m_1r = 129 & 13 \\ \hline \rho_1 = 12 & Q_1 = 9 \end{array}, \qquad \begin{array}{r|l} m_2r = 172 & 17 \\ \hline \rho_2 = 2 & Q_2 = 10 \end{array}.$$

Comme $Q_2 = Q_1 + 1$, le nombre de solutions entières et positives est

$$q + 1 = 7.$$

Les plus petites valeurs de x_1 et x_2 sont

$$x_1 = \rho_2 = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = a_1 - \rho_1 = 1.$$

Les sept solutions sont

$$x_1 = \underline{2},\ 19,\ 36,\ 53,\ 70,\ 87,\ 104 = y$$
$$x_2 = 79,\ 66,\ 53,\ 40,\ 27,\ 14,\ \underline{1} = x.$$

* * *

Lorsque c est divisible par le coefficient d'une inconnue, ou par les deux, il est en général plus simple de recourir à la méthode ordinaire (voir p. 8); cependant, la règle générale donnée par le théorème précédent se modifie très simplement :

1° c *est divisible seulement par l'un des coefficients des inconnues.* Dans ce cas, l'un des restes désignés par ρ_1 et ρ_2 s'annule. *Si* $\rho_1 = 0$, *la règle générale subsiste; si* $\rho_2 = 0$, *la plus petite valeur de* x_1 *est* a_2. *Le nombre de solutions est* q, DANS TOUS LES CAS (*).

2° c *est divisible par les coefficients des deux inconnues.* En examinant les formules données à la page 9, on voit que *la plus petite valeur entière et positive d'une inconnue égale le coefficient de l'autre inconnue. Le nombre de solutions est* q — 1.

Exemples :

$$13x + 11y = 561$$

	1	5	2
13	11	2	1
2	1	0	

; $\frac{1}{1}, \frac{6}{5}, \frac{13}{11}$; $\frac{a_1}{a_2} = \frac{11}{13}$, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{6}$

(*) Lorsque $\rho_2 = 0$, $Q_2 = Q_1 + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 561 & a_1a_2 = 143 \\ \hline r = 132 & q = 3 \end{array};$$

$$\begin{array}{r|l} m_1r = 660 & 11 \\ \hline \rho_1 = 0 & Q_1 = 60 \end{array}, \qquad \begin{array}{r|l} m_2r = 792 & 13 \\ \hline \rho_2 = 12 & Q_2 = 60 \end{array}$$

$N_c = 3$; plus petites valeurs : $x_1 = \rho_2 = 12$, $x_2 = a_1 - \rho_1 = 11$;

$$x_1 = \underline{12},\ 25,\ 38 = y$$
$$x_2 = 33,\ 22,\ \underline{11} = x.$$

* * *

$$13x + 11y = 546$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{11}{13}, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{6}, \qquad \begin{array}{r|l} 546 & a_1a_2 = 143 \\ \hline r = 117 & q = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} m_1r = 585 & 11 \\ \hline \rho_1 = 2 & Q_1 = 53 \end{array}, \qquad \begin{array}{r|l} m_2r = 702 & 13 \\ \hline \rho_2 = 0 & Q_2 = 54 \end{array}$$

$N_c = 3$; plus petites valeurs : $x_1 = a_2 = 13$ et $x_2 = a_1 - \rho_1 = 9$;

$$x_1 = \underline{13},\ 26,\ 39 = y$$
$$x_2 = 31,\ 20,\ \underline{9} = x.$$

* * *

$$17x + 12y = 612$$

$$\frac{c}{a_1a_2} = \frac{612}{204} = 3;$$

$N_c = 2$; plus petites valeurs : $x = 12$ et $y = 17$;

$$x = \underline{12},\ 24$$
$$y = 34,\ \underline{17}.$$

*
* *

Nombre de solutions entières non négatives de l'équation $ax + by = c$ (*).

THÉORÈME. — *Le nombre de solutions entières non négatives de l'équation* ax + by = c *égale le quotient* q *de* c *par* ab *(quotient exact ou par défaut) augmenté du nombre de solutions entières non négatives de l'équation* ax + by = r = c — abq.

PREMIER CAS. — .c *est divisible par* a *et par* b. Aux $q - 1$ solutions positives il faut ajouter les deux solutions

$$\begin{matrix} x = 0 \\ y = aq \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} y = 0 \\ x = bq; \end{matrix}$$

donc, si X_c est le nombre de solutions entières non négatives de l'équation en c, on a

$$X_c = q + 1.$$

Quant à l'équation en r,

$$ax + by = 0,$$

elle admet l'unique solution non négative

$$x = 0, \qquad y = 0;$$

ainsi

$$X_r = 1 \quad \text{et} \quad X_c = q + X_r$$

---

(1) CATALAN, PAOLIS et E. CESÀRO se sont occupés de cette question. LUCAS, dans sa *Théorie des Nombres*, donne de la propriété un énoncé inexact.

Deuxième cas. — .c *est divisible seulement par l'un des coefficients*. Soit $c = ak$. Aux q solutions entières et positives de l'équation

$$ax + by = ak,$$

il faut ajouter la solution

$$x = k, \qquad y = 0;$$

donc

$$X_c = q + 1.$$

Quant à l'équation en r,

$$ax + by = r = c - abq = a(k - bq),$$

comme, de

$$q < \frac{c}{ab} < q + 1,$$

on déduit

$$0 < k - bq < b,$$

elle admet la solution non négative

$$x = k - bq, \qquad y = 0;$$

de sorte que $X_r = 1$ et, par conséquent, $X_c = q + X_r$

Troisième cas. — c. *n'est divisible ni par* a *ni par* b. Les équations en c et en r n'admettent dans ce cas aucune solution dans laquelle une des inconnues a une valeur nulle; le nombre des solutions non négatives est donc celui des solutions positives déterminé antérieurement, et l'on a vu (p. 12) que N_c égale q ou $q + 1$, suivant que N_r est 0 ou 1. Donc, etc.

Autre énoncé. — En examinant les résultats obtenus ci-dessus, on peut observer que la propriété peut aussi s'énoncer :

L'équation $ax + by = c$ *admet* $q + 1$ *solutions entières non négatives, sauf dans le cas où,* c *n'étant divisible ni par* a *ni par* b, *l'équation* $ax + by = r = c - abq$ *n'admet pas de solution entière nor négative; dans ce cas seulement le nombre de solutions est* q.

SUR

UNE CONIQUE

ASSOCIÉE

A UN TRIANGLE

PAR

M. A. GOB

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE LIÉGE

SUR
UNE CONIQUE
ASSOCIÉE
A UN TRIANGLE

1. Préliminaires. — Soient (C) et (c) deux coniques polaires réciproques par rapport à un cercle de centre P; désignons par A et B les pôles des axes a et b de (c) et par f, f' les polaires des foyers F et F′ de (c) par rapport au cercle (P).

Les droites f et f' ont été appelées les *conjointes* de P par rapport à la conique (C) (M. d'Ocagne, *Les propriétés focales des coniques obtenues par la méthode des polaires réciproques*, Nouvelles annales de mathématiques, 3e série, t. XIV, p. 353). Les propriétés de ces droites sont les corrélatives des propriétés focales de (c); nous indiquons les propositions les plus importantes concernant les points A, B et les droites f, f'.

a) *Les points* A *et* B *sont les points de rencontre de la polaire de* P *et de l'hyperbole d'Apollonius de* P *par rapport à* (C); *ils sont situés sur les bissectrices de l'angle* F_1PF_1', F_1 *et* F_1' *étant les foyers de* (C).

En effet, 1° les droites a, b et la droite de l'infini forment un triangle conjugué à (c); le triangle PAB est donc conjugué à (C), et comme il est rectangle en P, la polaire PB de A par

rapport à (C) est perpendiculaire à PA ; l'hyperbole d'Apollonius de P passe donc par A (*) ;

2° les droites a et b sont les bissectrices de l'angle des asymptotes de (c) ; donc PA et PB sont les bissectrices de l'angle formé par les tangentes menées de P à (C) et, par suite, de l'angle F_1PF_1'.

b) *Si* M *et* N *sont deux points situés sur l'une des droites* f, f' *et conjugués par rapport à* (C), *l'angle* PMN *est droit.*

En effet, deux droites passant par F ou par F' et conjuguées par rapport à (c) sont rectangulaires.

c) *Les droites* f, f' *sont les deux cordes réelles communes à la conique* (C) *et à un cercle de rayon nul et de centre* P.

Cette propriété résulte de ce que les tangentes menées de F ou de F' à (c) sont des droites isotropes.

On conclut de là que si $f = o$, $f' = o$ sont les équations des droites f, f', et α, β les coordonnées de P, l'équation de (C) est de la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = kff'.$$

Par suite, si l, d, d' représentent les distances d'un point variable de (C) au point P et aux droites f, f', le rapport $\frac{l^2}{dd'}$ est constant.

d) *Les droites* f *et* f' *passent par* A *et sont également inclinées sur chacun des axes de* (C).

La première partie de cette proposition résulte de ce que F et F' sont situés sur a, la seconde résulte de la proposition (c).

e) *Les droites* f, f' *et les asymptotes de* (C) *forment un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre* P.

En effet, si de P on mène à (c) deux tangentes PQ, PR, les bissectrices des angles FQF', FRF', QFR, QF'R passent par P.

(*) On sait que l'hyperbole d'Apollonius d'un point P par rapport à une conique (C) est le lieu d'un point M tel que la perpendiculaire abaissée de M sur sa polaire passe par P.

f) Une droite quelconque rencontre (C) aux points α, β et les droites f, f' en γ et δ; les tangentes en α et β rencontrent f en α' et β' : *les angles* $\alpha P\beta$, $\gamma P\delta$ *ont les mêmes bissectrices, et la droite* $P\gamma$ *est bissectrice de l'angle* $\alpha' P\beta'$.

2. Soit un triangle ABC; considérons la conique γ définie, en coordonnées normales par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos A + 2xz \cos B + 2xy \cos C = 0. \quad (1)$$

On reconnaît aisément que cette conique est une ellipse imaginaire lorsque les trois angles du triangle ABC sont aigus; c'est une hyperbole lorsque ce triangle possède un angle obtus.

Le cercle de rayon nul ayant son centre en A a pour équation

$$y^2 + z^2 + 2yz \cos A = 0;$$

les cordes réelles communes à ce cercle et à la conique γ, c'est-à-dire les conjointes (§ 1, *c*) de P par rapport à γ sont donc les droites

$$x = 0, \qquad \delta_a \equiv x + 2y \cos C + 2z \cos B = 0.$$

Chaque côté du triangle ABC est donc une des droites conjointes au sommet opposé par rapport à la conique γ; en d'autres termes, les droites qui joignent les sommets du triangle aux points de rencontre de γ avec les côtés opposés sont des droites isotropes; en raison de cette propriété nous dirons que γ est la *conique isotropique* du triangle ABC. Inversement, le triangle ABC sera dit *isotropique par rapport à* γ.

On peut appliquer au point A et aux droites BC et δ_a les propositions établies au § 1. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer ces propriétés.

On pourra évidemment énoncer des propositions analogues

relativement aux côtés AC et AB et aux droites δ_b et δ_c^2 ayant pour équations

$$2x \cos C + y + 2z \cos A = 0,$$
$$2x \cos B + 2y \cos A + z = 0.$$

3. L'équation (1) peut se mettre sous la forme suivante

$$\Sigma x^2 \cos^2 A - 2\Sigma yz \cos B \cos C + (\Sigma x \sin A)^2 = 0. \qquad (2)$$

Il résulte de là que la conique γ a les mêmes asymptotes que la conique γ représentée par

$$\Sigma x^2 \cos^2 A - 2\Sigma yz \cos B \cos C = 0. \qquad (3)$$

Cette dernière conique a pour centre le point de Lemoine K et touche les côtés aux pieds des hauteurs; elle a été dénommée ellipse K (Vigarié, *Inventaire de la géométrie du triangle*, A. F., Congrès de Toulouse, 1887); il faut cependant observer que cette courbe est une hyperbole lorsque le triangle est obtusangle. Les asymptotes δ et δ' de (γ') ont déjà été étudiées (Neuberg, *Sur un groupe de trois paraboles*. Gob, *Sur deux transversales remarquables du triangle*, Mathesis, 2e série, t. VIII, pp. 129 et 131.) Il nous suffira de rappeler les principales propriétés de ces droites.

1° *Elles passent par le point de Lemoine* K;

2° *Les points de rencontre des côtés du triangle avec ces droites sont les projections d'angle* θ *et d'angle* $-\theta$ *des sommets opposés sur ces côtés, l'angle* θ *étant déterminé par la relation*

$$\cos^2 \theta = -\cos A \cos B \cos C.$$

L'angle θ *n'est réel que si le triangle est obtusangle; il est égal à l'angle sous lequel se coupent le cercle circonscrit et le cercle conjugué au triangle;*

3° *Chacune des droites* δ *et* δ' *passe par l'inverse triangulaire du pôle trilinéaire de la transversale réciproque de l'autre;*

4° *Les droites* δ *et* δ' *sont les tangentes communes à trois paraboles* π_a, π_b, π_c *déterminées comme suit : la parabole* π_a *est tangente aux côtés* AB, AC *et à la droite qui joint les pieds des hauteurs issues de* B *et de* C*; son axe est parallèle à la symédiane partant de* A, *et son foyer est la projection de l'orthocentre sur la médiane partant de* A.

5° *Les droites* δ *et* δ' *sont perpendiculaires aux tangentes menées par l'orthocentre à l'ellipse minimum circonscrite au triangle.*

4. L'équation de γ peut encore se mettre sous la forme

$$\Sigma yz \sin^3 A - \Sigma x \sin A . \Sigma x \sin B \sin C = 0.$$

La conique $\Sigma yz \sin^3 A = 0$ est l'inverse triangulaire de la droite de Longchamps; elle a ses asymptotes parallèles à celles de γ et rencontre cette courbe en deux points de la droite de Lemoine.

5. L'équation

$$\Sigma yz \sin^3 A = k \Sigma yz \sin A \qquad (4)$$

représente, lorsque k varie, une conique variable passant par les points d'intersection du cercle circonscrit avec la conique $\Sigma yz \sin^3 A = 0$ et ayant, par conséquent, ses axes parallèles à ceux de cette dernière conique et, par suite, à ceux de γ. En particulier, si l'on pose $k = \frac{1}{2} \Sigma \sin^2 A$, l'équation (4) devient

$$\Sigma yz \cos A = 0;$$

elle représente alors l'inverse triangulaire de l'axe orthique. Nous désignons cette conique par γ''; son centre est le point de Lemoine et, par suite, elle a les mêmes axes que la conique γ.

L'équation (4) peut s'interpréter comme suit : *les coniques*

inverses des parallèles à l'axe orthique ont leurs axes parallèles à ceux de γ (*).

6. L'équation tangentielle de γ est

$$\Sigma u^2 \sin^2 A + 2\Sigma vw (\cos B \cos C - \cos A) = 0. \qquad (5)$$

Cette équation peut s'écrire comme suit :

$$\Sigma u^2 - 2\Sigma vw \cos A = \Sigma u^2 \cos^2 A - 2\Sigma vw \cos B \cos C$$

Si l'on égale à zéro séparément les deux membres de cette équation, on obtient les équations tangentielles des points cycliques et de la conique γ''. Il résulte de là que *la conique* γ'' *est homofocale à* γ.

7. Les coordonnées des tangentes menées à γ par le point de Lemoine K vérifient l'équation

$$\Sigma u \sin A = 0. \qquad (6)$$

En retranchant de (5) le carré de l'équation (6), on obtient

$$\Sigma vw \cos A = 0,$$

c'est-à-dire l'équation tangentielle de γ', ce qui montre que les coniques γ et γ' ont les mêmes asymptotes δ et δ' (3). Si l'on représente par x, y, z les coordonnées du pôle trilinéaire de l'une des droites δ, δ', ces coordonnées vérifieront les équations

$$\Sigma \frac{\sin A}{x} = 0, \quad \Sigma x \cos A = 0.$$

Ainsi, *les droites* δ *et* δ' *sont les polaires trilinéaires des points de rencontre du cercle circonscrit avec l'axe orthique*.

(*) Ce théorème est un cas particulier d'un théorème connu : *les coniques inverses d'un système de parallèles ont leurs axes parallèles.*

8. La distance d'un point (x, y, z) à la droite $ux + vy + wz = 0$ est égale à

$$d = \frac{\Sigma ux}{\sqrt{\Sigma u^2 - 2\Sigma vw \cos A}}$$

Appliquons cette formule à la droite δ_a (§ 2) ayant pour équation

$$x + 2y \cos C + 2z \cos B = 0$$

on obtient

$$d = \frac{x + 2y \cos C + 2z \cos B}{\sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}} = \frac{x + 2y \cos C + 2z \cos B}{\sqrt{1 + 8 \cos^2 \theta}}.$$

Ainsi, les droites δ_a, δ_b, δ_c forment un triangle A'B'C' tel que si (x, y, z), (x', y', z') sont les coordonnées normales absolues d'un même point M par rapport aux triangles ABC, A'B'C', on a les relations

$$\begin{aligned} \rho x' &= x + 2y \cos C + 2z \cos B, \\ \rho y' &= 2x \cos C + y + 2z \cos A, \\ \rho z' &= 2x \cos B + 2y \cos A + z, \end{aligned} \qquad (7)$$

ρ désignant la quantité $\sqrt{1 + 8 \cos^2 \theta}$.

9. Les triangles ABC, A'B'C' sont inversement semblables, car leurs côtés correspondants ont des directions symétriques par rapport aux axes Δ et Δ' de la conique γ (§ 1, *d*). Ils ont même point de Lemoine, car si l'on remplace, dans les formules (7), x, y, z par $k \sin A$, $k \sin B$, $k \sin C$, on obtient

$$\rho x' = 3k \sin A, \quad \rho y' = 3k \sin B, \quad \rho z' = 3k \sin C.$$

Le rapport de similitude des triangles ABC, A'B'C' est égal au rapport des distances du point de Lemoine commun à deux côtés homologues. Ce rapport est donc égal à $\frac{\rho}{3}$. La quantité ρ étant toujours inférieure à 3, le triangle A'B'C' est toujours plus grand que ABC.

Deux points M et M′ homologues dans les deux triangles ABC et A′B′C′ sont des points correspondants de deux figures inversement semblables; les droites doubles de cette transformation sont les axes Δ et Δ′ de γ et le rapport de similitude est $\frac{\rho}{3}$.

10. Si, dans les formules (7), on remplace x, y, z par les coordonnées h_a, 0, 0 du sommet A, on obtient

$$\rho x' = h_a,\ \rho y' = 2h_a \cos C,\ \rho z' = 2h_a \cos B$$

d'où

$$\frac{y'}{z'} = \frac{\cos C}{\cos B},\ x' = \frac{h_a}{\rho} = \frac{h'_a}{3},$$

h'_a désignant la hauteur issue de A′ dans le triangle A′B′C′. Par conséquent, *les sommets du triangle* ABC *sont les projections du centre de gravité de* A′B′C′ *sur les hauteurs de ce triangle.*

On voit par là que l'orthocentre et le centre de gravité de A′B′C′ sont deux points diamétralement opposés du cercle ABC. Autrement dit, *le cercle* ABC *est le cercle orthocentroïdal de* A′B′C′.

Les propriétés des couples de triangles tels que les sommets de l'un sont les projections du centre de gravité de l'autre sur les hauteurs ont déjà été étudiées. (Mathesis, 1re série, t. X, p. 166.)

11. Les coordonnées absolues du symétrique M_a d'un point M (x, y, z) par rapport à BC sont

$$-x,\quad y + 2x \cos C,\quad z + 2x \cos B.$$

Par conséquent les coordonnées du centre de gravité M′ du *triangle réflexe* (*) $M_a M_b M_c$ de M sont

$$\frac{1}{3}(x + 2y \cos C + 2z \cos B),\ldots$$

(*) Le triangle réflexe d'un point M par rapport à un triangle ABC est le triangle qui a pour sommets les symétriques de M par rapport aux côtés de ABC.

ou

$$\frac{\rho x'}{3}, \quad \frac{\rho y'}{3}, \quad \frac{\rho z'}{3}.$$

On conclut de là que M′ est l'homologue dans le triangle ABC du point M, considéré comme appartenant au triangle A′B′C′. Ainsi : *un point et le centre de gravité de son triangle réflexe se correspondent dans deux figures inversement semblables, ayant pour droites doubles les droites* Δ *et* Δ′ ; *le rapport de similitude est* $\frac{\rho}{3}$.

12. Soient A″, B″, C″ les projections du centre de gravité de ABC sur les hauteurs de ce triangle ; on déduit la figure A″B″C″ de la figure ABC de la même façon que l'on déduit ABC de A′B′C′. Le triangle A″B″C″ est donc inversement semblable à ABC (et directement semblable à A′B′C′) ; les droites doubles sont encore Δ et Δ′ et le rapport de similitude est $\frac{\rho}{3}$.

Il résulte de là que si l'on considère le point M comme appartenant à ABC, son homologue dans la figure A″B″C″ sera M′. Mais $M_aM_bM_c$ est maintenant le triangle réflexe de M par rapport au plus grand des deux triangles inversement semblables ABC, A″B″C″. Comme on peut remplacer A″B″C″ par ABC et ABC par A′B′C′, on voit que M′ est aussi le centre de gravité du triangle réflexe de M par rapport à A′B′C′ ; par conséquent les triangles réflexes (ou les triangles podaires) de M par rapport aux triangles ABC, A′B′C′ ont même centre de gravité. Ainsi : *si l'on construit une suite de triangles tels que chacun d'eux ait pour sommets les projections du centre de gravité du précédent sur les hauteurs, les triangles podaires d'un point quelconque par rapport à tous ces triangles ont même centre de gravité.*

13. Lorsque le point M décrit le cercle ABC, le point M′ décrit le cercle orthocentroïdal A″B″C″. Donc *le cercle orthocentroïdal est le lieu du centre de gravité des symétriques d'un*

point variable du cercle ABC *par rapport aux côtés du triangle* ABC.

14. Soient

$$ux + vy + wz = 0, \quad u'x + v'y + w'z = 0,$$

les équations d'une même droite d par rapport aux triangles ABC, A'B'C'. On a, eu égard aux formules (7)

$$\begin{aligned} u &= u' + 2v' \cos C + 2w' \cos B, \\ v &= 2u' \cos C + v' + 2w' \cos A, \\ w &= 2u' \cos B + 2v' \cos A + w'. \end{aligned}$$

Chacune des droites Δ et Δ' a la même équation par rapport aux triangles ABC, A'B'C'. Donc si d coïncide avec Δ ou avec Δ', on a $\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'}$. Les coordonnées des droites Δ, Δ' vérifient donc les équations

$$\frac{u + 2v \cos C + 2w \cos B}{u} = \frac{2u \cos C + v + 2w \cos A}{v} = \frac{2u \cos B + 2v \cos A + w}{w} = k$$

ou

$$\begin{aligned} u(1-k) + 2v \cos C + 2w \cos B &= 0, \\ 2u \cos C + v(1-k) + 2w \cos A &= 0, \\ 2u \cos B + 2v \cos A + w(1-k) &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

En éliminant u, v, w entre ces équations, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2\cos C & 2\cos B \\ 2\cos C & 1-k & 2\cos A \\ 2\cos B & 2\cos A & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1-k)^3 - 4(1-k)(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) + 16 \cos A \cos B \cos C = 0.$$

Si l'on remplace la quantité $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ par $1 - 2 \cos A \cos B \cos C$, cette équation devient

$$(1-k)[(1-k)^2-4] + 8 \cos A \cos B \cos C [(1-k)+2] = 0.$$

On trouve d'abord la solution $1 - k = -2$ ou $k = 3$. Les équations (8) se réduisent alors à

$$-u + v \cos C + w \cos B = 0, \ldots$$

Elles admettent la solution évidente $u = \sin A$, $v = \sin B$, $w = \sin C$, qui correspond à la droite de l'infini. On a ensuite l'équation

$$k^2 = 1 - 8 \cos A \cos B \cos C \quad \text{ou} \quad k = \pm \rho.$$

Si l'on remplace k par ces valeurs dans les équations (8), on pourra tirer de ces équations les coordonnées des droites Δ et Δ'.

15. Les équations (8) peuvent s'écrire comme suit :

$$\frac{v \cos C + w \cos B}{u} = \frac{u \cos C + w \cos A}{v} = \frac{u \cos B + v \cos A}{w} \qquad (9)$$

ou

$$\left.\begin{aligned} (v^2 - w^2) \cos A - uw \cos C + uv \cos B = 0, \\ (w^2 - u^2) \cos B - uv \cos A + vw \cos C = 0, \\ (u^2 - v^2) \cos C - vw \cos B + uw \cos A = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Les équations (10) représentent trois paraboles π'_a, π'_b, π'_c tangentes aux deux droites Δ, Δ'. La parabole π'_a est tangente aux droites $u = 0$, $v \pm w$ c'est-à-dire aux bissectrices de l'angle A, d'où il résulte que sa directrice est la symédiane partant de A ; elle est aussi tangente aux droites $(v = 0, w = 0)$, $(v = 0, w \cos A + u \cos C = 0)$, $(w = 0, v \cos B + u \cos B = 0)$, c'est-à-dire au côté BC et aux hauteurs partant de B et C.

Ces paraboles ont déjà été rencontrées (MATHESIS, 1re série, t. X, p. 169).

16. Additionnons les équations (10) multipliées respectivement par cos B cos C, cos A cos C, cos A cos B; nous obtenons

$$\Sigma vw \cos A (\cos^2 C - \cos^2 B) = 0.$$

Les droites Δ et Δ' passant par le point de Lemoine, on a

$$\Sigma u \sin A = 0.$$

Si x, y, z sont les coordonnées du pôle trilinéaire de l'une des droites Δ et Δ', on a donc

$$\Sigma x \cos A (\cos^2 B - \cos^2 C) = 0, \quad \Sigma yz \sin A = 0.$$

Ces équations représentent respectivement la droite d'Euler du triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle. Donc, *les droites Δ et Δ' sont les polaires trilinéaires des points de rencontre α et β de la droite d'Euler avec le cercle circonscrit.*

Les droites Δ et Δ' sont d'ailleurs parallèles aux droites de Simson des points α, β. En effet, si l'on cherche la condition pour que la polaire trilinéaire $ux + vy + wz = 0$ d'un point $\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}\right)$ soit parallèle à la droite qui joint les projections de ce point sur AB et AC, on trouve l'équation

$$(v^2 - w^2) \cos A - uw \cos C + vu \cos B = 0,$$

qui représente la parabole π'_a à laquelle sont tangentes les droites Δ et Δ'. De là résulte aussi une nouvelle définition des paraboles π'_a, π'_b, π'_c.

17. Additionnons les équations (10) multipliées respectivement par cos A, cos B, cos C, il vient

$$\Sigma u^2 (\cos^2 B - \cos^2 C) = 0.$$

Cette équation représente une parabole tangente à Δ et Δ′ et conjuguée au triangle ABC. Elle est tangente à l'axe orthique aux côtés du triangle orthique, aux interbissectrices et à la droite qui passe par les pieds des bissectrices extérieures.

18. Il existe une relation simple entre les angles α, β, γ que forme la droite Δ avec les côtés BC, CA, AB du triangle ABC. Pour trouver cette relation, nous remarquons que si P_a, P_b, P_c (fig. 1) désignent les projections d'un point M de Δ sur les côtés

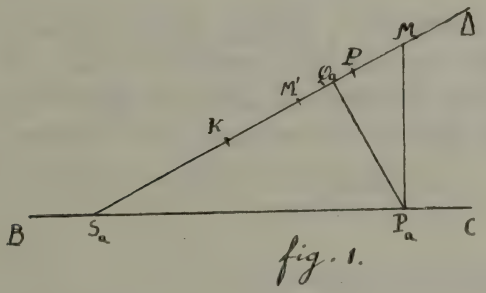


fig. 1.

du triangle ABC et P le centre de gravité du triangle $P_aP_bP_c$, le symétrique M′ du point M par rapport à P est le point de la figure A″B″C″ qui correspond à P considéré comme appartenant à la figure ABC (12). Comme Δ est une droite double de ces deux figures, les points M′ et P sont situés sur Δ, et on a la relation

$$KM : KM' = 3 : \rho.$$

Si Q_a, Q_b, Q_c sont les projections de P_a, P_b, P_c sur Δ, on a

$$\Sigma MQ_a = 3MP = \frac{3}{2} MM'. \qquad (11)$$

Soient S_a, S_b, S_c les points de rencontre de Δ avec les côtés du triangle ABC, on a les égalités

$$MQ_a = MP_a \sin\alpha = S_aM \sin^2\alpha = S_aK \sin^2\alpha + KM \sin^2\alpha,$$

$$MM' = KM - KM' = \frac{3-\rho}{3} KM.$$

Par suite, l'égalité (11) peut s'écrire comme suit

$$\Sigma S_a K \sin^2\alpha + KM\Sigma \sin^2\alpha = \frac{3-\rho}{2} KM.$$

Cette égalité doit être vérifiée quel que soit le point M, par suite

$$\Sigma \sin^2\alpha = \frac{3-\rho}{2}, \tag{12}$$

$$\Sigma S_a K \sin^2\alpha = 0. \tag{13}$$

L'égalité (12) est la relation cherchée entre α, β, γ; la relation (13) exprime une propriété connue : le point de Lemoine K est le centre de gravité de son triangle podacre. La relation (12) peut aussi se mettre sous la forme

$$\Sigma \cos^2\alpha = \frac{3+\rho}{2}, \tag{12'}$$

des relations (12) et (12') on tire

$$\Sigma \cos 2\alpha = \rho.$$

19. Désignons par l_a, l_b, l_c les distances d'un point M de la conique γ aux points A, B, C et par x, y, z et x', y', z' les coordonnées normales absolues de ce point par rapport aux triangles ABC, A'B'C'. En mettant l'équation (1) de γ sous la forme

$$y^2 + z^2 + 2yz\cos A + x(x + 2y\cos C + 2z\cos B) = 0$$

et en tenant compte des égalités (7), on voit que l'on a la relation (comparer 1, c)

$$l_a^2 \sin^2 A \pm \rho xx' = 0,$$

l'où

$$\frac{l_a^2 \sin^2 A}{xx'} = \frac{l_a^2 \sin^2 B}{yy'} = \frac{l_c^2 \sin^2 C}{zz'} = \pm\rho.$$

20. On a les relations

$$y^2 + z^2 + 2yz \cos A = l_a^2 \sin^2 A,$$
$$x^2 + z^2 + 2xz \cos B = l_b^2 \sin^2 B,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy \cos C = l_c^2 \sin^2 C.$$

Si l'on additionne membre à membre ces égalités, on obtient

$$2\Sigma x^2 + 2\Sigma yz \cos A = \Sigma l_a^2 \sin^2 A,$$

où, en tenant compte de l'équation de γ

$$\Sigma x^2 = \Sigma l_a^2 \sin^2 A = \Sigma \overline{P_b P_c}^2, \qquad (14)$$

$P_a P_b P_c$ étant le triangle podaire de M (fig. 2).

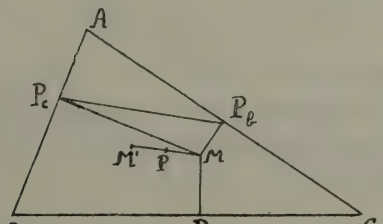


fig. 2.

Soit P le centre de gravité de $P_a P_b P_c$ et M′ le symétrique de M par rapport à P, on a

$$\Sigma x^2 = \Sigma \overline{MP_a}^2 = 3\overline{MP}^2 + \frac{1}{3}\Sigma \overline{P_b P_c}^2.$$

Par suite, l'égalité (14) devient

$$MP^2 = \frac{2}{9}\Sigma \overline{P_b P_c}^2 = \frac{2}{9}\Sigma l_a^2 \sin^2 A. \qquad (15)$$

21. On démontre aisément la relation suivante, dans laquelle M désigne un point quelconque

$$\Sigma l_a^2 \sin^2 A = \overline{KM}^2 \Sigma \sin^2 A + \frac{12R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\Sigma \sin^2 A}. \quad (16)$$

Si le point M est situé sur γ, on a la relation (14) et l'égalité (16) devient

$$\Sigma x^2 = \overline{KM}^2 \Sigma \sin^2 A + \frac{12R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\Sigma \sin^2 A},$$

Le lieu d'un point tel que Σx^2 soit constante est une ellipse ε de centre K. L'égalité précédente montre que les points de rencontre de cette ellipse avec γ sont situés sur une circonférence de centre K ; par conséquent, *les axes des ellipses* ε *sont les droites* Δ, Δ'.

22. L'égalité (16) permet de déterminer simplement l'équation de γ rapportée à ses axes de symétrie Δ, Δ' ; comme $MM' = 2MP$, cette égalité peut s'écrire, si l'on tient compte de (15) (fig. 3)

$$\overline{MM'}^2 = \frac{8}{9} \overline{KM}^2 \Sigma \sin^2 A + \frac{32R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{3\Sigma \sin^2 A}. \quad (17)$$

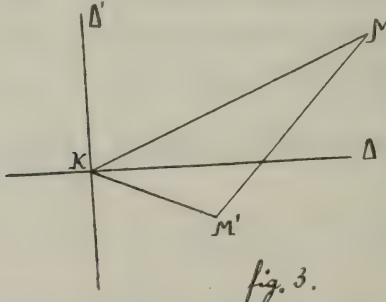


fig. 3.

Or, M, M' sont des points correspondants des deux figures

semblables ABC, A″B″C″; par suite, les droites KM, KM′ sont symétriques par rapport à Δ et l'on a

$$KM : KM' = \rho : 3.$$

Si X, Y sont les coordonnées de M par rapport aux axes Δ, Δ′, celles de M′ seront $\frac{1}{3}\rho X$, $-\frac{1}{3}\rho Y$, d'où

$$\overline{MM'}^2 = \frac{1}{9}[(3-\rho)^2X^2 + (3+\rho)^2Y^2]$$

En remplaçant, dans la relation (17), $\overline{MM'}^2$ par cette valeur et $\overline{KM}^2$ par $X^2 + Y^2$, on obtient l'équation de γ

$$\frac{1}{9}[(3-\rho)^2X^2 + (3+\rho)^2Y^2] = \frac{8}{9}(X^2+Y^2)\,\Sigma \sin^2 A + \frac{32R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{3\Sigma \sin^2 A}.$$

Si l'on remarque que

$$\Sigma \sin^2 A = 2 + 2\cos A \cos B \cos C = 2\sin^2\theta = \frac{9-\rho^2}{4}$$

cette équation se simplifie et devient

$$(3-\rho)^2X^2 + (3+\rho)^2Y^2 = 2(9-\rho^2)(X^2+Y^2) + \frac{384R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{9-\rho^2}$$

ou

$$(\rho^2 - 2\rho - 3)X^2 + (\rho^2 + 2\rho - 3)Y^2 = \frac{128R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{9-\rho^2}. \qquad (18)$$

Nous supposerons que le triangle ABC est obtusangle ; la conique γ est alors une hyperbole dont Δ est l'axe imaginaire.

23. Supposons l'hyperbole γ fixe et considérons la série des triangles ABC isotropiques par rapport à cette hyperbole. Il résulte de ce qui précède que *tous ces triangles sont obtusangles et ont pour point de Lemoine commun le centre* K *de l'hyperbole* γ. Nous allons indiquer quelques autres propriétés de ces triangles.

24. Soient α, β les axes de γ; on tire de (18) :

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{128R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{(\rho-1)(3-\rho)(3+\rho)^2} = \frac{32S^2}{R^2}\cdot\frac{1}{(\rho-1)(3-\rho)(3+\rho)^2},\\ \beta^2 &= \frac{128R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{(\rho-1)(3-\rho)^2(3+\rho)} = \frac{32S^2}{R^2}\cdot\frac{1}{(\rho-1)(3-\rho)^2(3+\rho)}.\end{aligned} \tag{19}$$

d'où, en représentant par 2ω l'angle des asymptotes de γ

$$ty^2\omega = \frac{(\rho+1)(3-\rho)}{(\rho-1)(3+\rho)}$$

Il résulte de cette dernière formule que ρ *et, par suite, l'angle* θ *ont la même valeur pour tous les triangles isotropiques par rapport à une hyperbole donnée.*

Les relations (19) montrent ensuite que *le rapport de la surface au rayon du cercle circonscrit est le même pour tous ces triangles.* On peut remarquer la formule

$$\frac{S^2}{R^2} = 2\alpha\beta \sin^3\theta \cos\theta.$$

25. Les asymptotes δ, δ' de γ (fig. 4) rencontrent le côté BC en des points U et V symétriques par rapport au pied de la hauteur AD et les angles AUD, AVD sont égaux à θ (3) ; on a donc

$$DU = AD \cot\theta = \frac{2S \cot\theta}{R \sin A}.$$

Soit KL la perpendiculaire abaissée du point de Lemoine K sur BC, on a

$$KL = \frac{2Sa}{\Sigma a^2} = \frac{S \sin A}{R\Sigma \sin^2 A} = \frac{4S \sin A}{R(9-\rho^2)}$$

d'où

$$DU.KL = \frac{4S^2 \cot \theta}{R^2(9-\rho^2)}$$

La surface du triangle KUV est donc constante et, par conséquent, le côté BC enveloppe une hyperbole. Ainsi, *les*

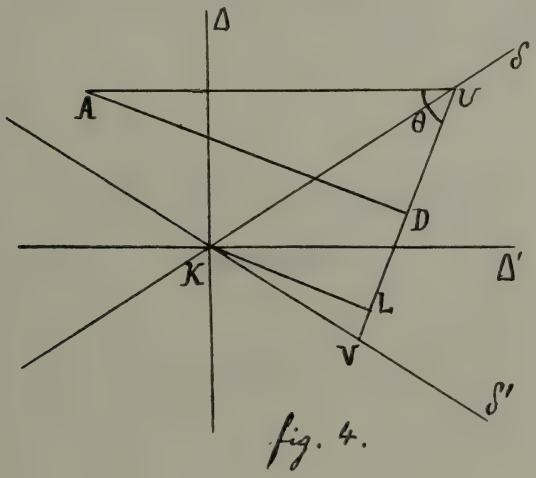


fig. 4.

triangles isotropiques par rapport à une hyperbole γ *sont circonscrits à une autre hyperbole ayant les mêmes asymptotes que* γ *et qui touche chaque côté au pied de la hauteur correspondante.*

Cette hyperbole est évidemment la conique γ' rencontrée plus haut (5).

26. Le triangle variable ABC étant circonscrit à une conique fixe est inscrit à une autre conique ; on peut démon-

trer directement cette propriété en remarquant que la hauteur DA est proportionnelle à UV, c'est-à-dire au diamètre de γ conjugué à KD; on déduit aisément de cette remarque que le lieu de A est une conique ayant ses axes dirigés suivant ceux de γ. Cette conique est évidemment la conique γ'' (6). Ainsi, *les triangles isotropiques par rapport à une hyperbole* γ *sont inscrits à une autre hyperbole homofocale avec* γ.

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

DANS LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A

PARAMÈTRE VARIABLE

PAR

Paul NOAILLON

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION

Rappelons d'abord, sur un exemple simple, ce que l'on entend par développement asymptotique (*).

Soit donnée l'expression

$$f(x) = e^x \cdot \int_x^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx \qquad (1)$$

où x est un nombre positif que l'on a à considérer dans le voisinage de $+\infty$.

En intégrant par parties, on a

$$\int_x^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx = \frac{1}{x} e^{-x} - 1 \cdot \int_x^\infty \frac{1}{x^2} e^{-x} dx.$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_x^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx = \frac{1}{x} e^{-x} - \frac{1}{x^2} e^{-x} + 1 \cdot 2 \cdot \int_x^\infty \frac{1}{x^3} e^{-x} dx.$$

(*) Cf. *Leçons sur les séries divergentes* (Chapitre I) par Emile Borel. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

En continuant ainsi, l'on aura

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \frac{1.2.3}{x^4} + \cdots + \frac{(-1)^j \cdot \lfloor j}{x^{j+1}} + R_{j+1} \\ \text{avec} \qquad R_{j+1} &= (-1)^{j+1} \cdot \lfloor j+1 \cdot c^x \int_x^\infty \frac{c^{-x}}{x^{j+2}}\, dx \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$\lfloor j$ représentant, selon la notation anglaise, la factorielle $1.2.3....j$.

Mais la fonction c^{-x} est décroissante. Donc sa valeur dans tout l'intervalle (x, ∞) reste non supérieure à c^{-x}, et l'on a

$$\int_x^\infty \frac{c^{-x}}{x^{j+2}}\, dx < c^{-x} \int_x^\infty \frac{dx}{x^{j+2}} = \frac{c^{-x}}{(j+1) \cdot x^{j+1}}.$$

Par suite, en représentant par $\overline{\theta}$ une indéterminée comprise entre 0 et 1, la relation (2) donne

$$\left.\begin{aligned} f(x) = &\left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \cdot + \cdots + (-1)^{j-1} \frac{\lfloor j-1}{x^j} \right\} \\ &+ \left[(-1)^j \frac{\lfloor j}{x^{j+1}} + (-1)^{j+1} \frac{\lfloor j+1}{(j+1)x^{j+1}} \overline{\theta} \right]. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

La somme entre [ ] est égale à

$$(-1)^j \frac{\lfloor j}{x^{j+1}} (1 - \overline{\theta}),$$

donc de la forme

$$(-1)^j \frac{\lfloor j}{x^{j+1}} \cdot \overline{\theta}.$$

En représentant par

$$u(x, j)$$

l'expression entre { } dans (3), c'est-à-dire la somme des j premiers termes de la série

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \frac{1.2.3}{x^4} + \cdots \tag{4}$$

la relation (3) s'écrira

$$f(x) = u(x,j) + (-1)^j \cdot \frac{\lfloor j}{x^{j+1}} \cdot \bar{\theta}. \tag{5}$$

En particulier, pour $j = 1$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot \bar{\theta}$$

et l'on voit que la courbe

$$y = \frac{1}{x}$$

est asymptotique à la courbe

$$y = f(x)$$

et possède donc vers l'infini une allure pareille.

Pour $j = 2$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} \cdot \bar{\theta}$$

et l'on voit que, dans le voisinage de $+\infty$, la courbe

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

épouse encore plus fidèlement la forme de

$$y = f(x).$$

En un mot, à mesure que l'on augmentera j, on obtiendra, par la fonction $u(x, j)$, une représentation de plus en plus fidèle, pour x très grand, de la fonction

$$f(x) = e^x \int_x^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx.$$

C'est pourquoi nous dirons, avec M. H. Poincaré, que la fonction $u(x, j)$ est une représentation asymptotique de la fonction $f(x)$, pour $x = +\infty$.

* * *

Remarquons bien que la série (4) est divergente, quelque grand que soit x.

On ne pourra donc, pour calculer $f(x)$ avec une erreur inférieure en module à un nombre donné ε, utiliser cette série (4) à la manière ordinaire; c'est-à-dire en faisant croître suffisamment la valeur de j dans $u(x, j)$, x restant fixe.

C'est le contraire que nous ferons :

Nous donnerons à j une valeur fixe ($j = 1$ si l'on veut), et nous remplacerons le nombre donné x par un nombre x_1 que nous ferons croître jusqu'à ce que la différence

$$f(x_1) - u(x_1, j)$$

soit, en module, inférieure à ε_1, ce nombre ε_1 étant lui-même plus petit que ε.

Comme on a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = e^x \int_x^{x_1} \frac{e^{-x}}{x} dx + e^x \int_{x_1}^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= e^x \int_x^{x_1} \frac{e^{-x}}{x} dx + e^{x-x_1} \left\{ e^{x_1} \int_{x_1}^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \right\} \\ &= e^x \int_x^{x_1} \frac{e^{-x}}{x} dx + e^{x-x_1} f(x_1) \end{aligned} \qquad (6)$$

on voit que l'on aura

$$f(x) = e^{x} \int_{x}^{x_1} \frac{e^{-x}}{x}\, dx + e^{x-x_1} \{ u(x_1, j) \pm \overline{\theta}\varepsilon_1 \}$$

et à fortiori, puisque

$$e^{x-x_1} < 1,$$

$$f(x) = e^{x} \int_{x}^{x_1} \frac{e^{-x}}{x}\, dx + e^{x-x_1} u(x_1, j) \pm \overline{\theta}\varepsilon_1. \qquad (7)$$

L'intégrale du deuxième membre s'étendant à un intervalle fini $(x\ x_1)$, il sera facile de la calculer, par exemple comme limite de somme, avec une erreur inférieure en module à $e^{-x}(\varepsilon - \varepsilon_1)$. Donc

$$\int_{x}^{x_1} \frac{e^{-x}}{x}\, dx = \mathrm{S} \pm \overline{\theta}(\varepsilon - \varepsilon_1) e^{-x} \qquad (8)$$

et par cette substitution la relation (7) devient

$$f(x) = e^{x} . \mathrm{S} + e^{x-x_1} . u(x_1, j) \pm \overline{\theta} \{ (\varepsilon - \varepsilon_1) + \varepsilon_1 \}$$

ou

$$f(x) = e^{x} . \mathrm{S} + e^{x-x_1} . u(x_1, j) \pm \overline{\theta} . \varepsilon. \qquad (9)$$

Et l'on voit que

$$e^{x} . \mathrm{S} + e^{x-x_1} . u(x_1, j)$$

donne bien la valeur de $f(x)$ avec une erreur inférieure en module au nombre donné ε.

*
* *

La considération de séries divergentes analogues à (4) est

une nécessité qui s'impose dans la théorie des équations différentielles.

Il est bien connu, en effet, que les séries de Thomé, satisfaisant formellement à l'équation

$$\left(P_0 \frac{d^n}{dt^n} + P_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + P_n\right) y = 0 \qquad (10)$$

où

$$t = \frac{1}{x},$$

sont en général divergentes quand P_0 s'annule pour $t = 0$, quand bien même les coefficients $P_0 P_1 \ldots P_m$ sont des fonctions holomorphes de $t = \frac{1}{x}$.

Le fait est encore vrai pour les solutions de l'équation

$$(P D^n + P_1 D^{n-1} + \cdots + P_n) y = 0, \qquad (11)$$

où

$$D = \frac{d}{dx},$$

quand on développe ces solutions en séries ordonnées par rapport au paramètre variable x, tendant vers $+\infty$, si P_0 s'annule pour $x = \infty$. Pour en avoir des exemples, il suffira de remplacer dans l'équation (10) t par $\frac{z}{x}$.

* * *

Enfin, et c'est la raison déterminante qui nous engage à présenter ce travail, la théorie des développements asymptotiques constitue une méthode tout à fait pratique, dans la plupart des cas, pour décider de la convergence ou de la divergence d'une série, et cela sans se tenir à la convergence absolue.

Nous montrons, en effet, dans une note annexée à ce travail,

qu'on ne change pas l'état de convergence ou de divergence d'une série

$$\sum_{x=x_0}^{x=\infty} \mathrm{Y}(x) \qquad (12)$$

— dans laquelle chaque terme $\mathrm{Y}(x)$ est développable asymptotiquement sous la forme

$$\mathrm{Y}(x) = \mathrm{T}(x) \cdot \left\{ 1 + \frac{\mathrm{A}_1}{x^r} + \frac{\mathrm{A}_2}{x^{r.2}} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_j}{x^{rj}} + \frac{\bar{\varepsilon}}{x^{rj}} \right\} \qquad (13)$$

où $\bar{\varepsilon}$ représente une fonction qui tend vers zéro quand x tend vers l'infini —

nous montrons, dans cette note, qu'on n'altérera pas la convergence ni la divergence de la série (12) quand on remplacera chacun de ses termes $\mathrm{Y}(x)$ par le premier terme $\mathrm{T}(x)$ de son développement (13).

On ramène ainsi la série (12) à une série équiconvergente beaucoup plus simple

$$\sum_{x=x_0}^{x=\infty} \mathrm{T}(x). \qquad (14)$$

Si l'on nous dit que, pour ce faire, point n'est besoin de savoir former tout le développement (13), mais seulement son premier terme, nous répondrons que l'on peut avoir à considérer une série (12) dans laquelle $\mathrm{Y}(x)$ est donné par une fonction composée

$$\mathrm{Y}(x) = \mathrm{F}\{\alpha(x), \beta(x), \ldots\}$$

et que si dans F on remplace $\alpha(x)$, $\beta(x)$,... par leurs développements asymptotiques, il pourra se faire que les premiers termes des développements de $\alpha(x)$, $\beta(x)$,... se détruisent entre eux, de sorte que, pour avoir le premier terme du développement de $\mathrm{Y}(x)$, il faudra employer plusieurs termes dans les développements de $\alpha(x)$, $\beta(x)$, ...

L'emploi des développements asymptotiques fournit donc une méthode très générale, peut-être même la seule qui soit pratique et un peu générale, pour l'étude de la convergence. A ce titre, on ne saurait trop, ce nous semble, multiplier les recherches sur ce sujet.

*
* *

Nous ferons les deux remarques suivantes, relativement à la portée de l'étude que nous allons développer :

Première remarque.

Dans les équations différentielles que nous allons considérer, la variable de différentiation z n'est pas la même que la variable ordonnatrice x. Ce seront des équations différentielles linéaires semblables à l'équation (11), avec ou sans second membre.

Mais si l'on voulait étudier le cas de $z = x$, il n'y aurait que bien peu de modifications à apporter à ce travail :

Il suffirait tout simplement de supposer que le signe D représente, non pas l'opérateur $\frac{d}{dz}$, mais l'opérateur $x\frac{d}{dx}$, pour avoir, presque sans autre changement, la théorie des équations différentielles lorsque la variable de différentiation est x.

Et la théorie que l'on obtiendra ainsi sera tout à fait générale et sans aucune restriction. Résultat qui n'avait pas encore été atteint jusqu'à présent, même au point de vue purement formel.

Seconde remarque.

Dans ce travail, nous recherchons des développements asymptotiques *indéfinis*, et, pour pouvoir les obtenir, nous serons contraint d'exiger des coefficients de l'équation différentielle (11) qu'ils possèdent eux aussi un développement

asymptotique indéfini et qu'ils soient indéfiniment dérivables par rapport à z.

Au cas où ces coefficients ne posséderaient qu'un développement asymptotique limité et où ils ne seraient pas indéfiniment dérivables par rapport à z, nos raisonnements seront encore applicables, mais à condition de se contenter pour le développement asymptotique de y d'un nombre de termes limité, nombre de termes qu'on reconnaîtra à mesure que l'on développera les calculs, mais que nous ne fixerons pas à priori, parce que la formule générale serait par trop complexe.

* * *

Notre travail est divisé en quatre parties :

Dans la première partie, après avoir défini, sous le nom de *calcul des classes de fonctions*, une extension de la théorie des inégalités destinée à faciliter les recherches d'analyse, nous passons en revue les principales règles de notre *calcul asymptotique*, en élargissant un peu le point de vue de M. H. Poincaré. (Non pas dans un vain désir de généraliser quand même, mais parce que nous faciliterons nos démonstrations.)

* * *

Dans la deuxième partie, nous étudions la structure des fonctions algébriques (irrationnelles) dans le voisinage de $x = \infty$. C'est-à-dire des solutions Φ de l'équation algébrique

$$P_0\Phi^n + P_1\Phi^{n-1} + \cdots + P_{n-1}\Phi + P_n = 0 \qquad (15)$$

où les coefficients P sont des fonctions de x.

Dans le cas où ces fonctions sont holomorphes pour $x = \infty$, la question est complètement élucidée par le mémoire de Puiseux (*). Et elle se trouve très clairement exposée dans le *Traité d'analyse* de Picard (**).

(*) *Journal de mathématiques* (de Liouville), t. XV (1850).

(**) Tome II, p. 392.

Mais ici nous avons besoin de considérer le cas où les coefficients ne sont pas holomorphes à l'infini, mais seulement développables asymptotiquement sous la forme

$$x^m\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_j}{x^j}\right).$$

C'est pourquoi nous nous sommes vus obligés de faire une théorie qui ne fût point basée sur les propriétés des fonctions holomorphes, mais seulement sur la notion de croissance.

* * *

Dans les deux dernières parties de ce travail, on considérera les équations différentielles linéaires de la forme

$$(P_0D^n + P_1D^{n-1} + \cdots + P_n)y = 0 \qquad (11)$$

ou bien, avec second membre

$$(P_0D^n + P_1D^{n-1} + \cdots + P_n)y = K \qquad (16)$$

où

$$D = \frac{d}{dz}$$

où les coefficients P et le second membre K sont des fonctions de la variable de différentiation z et d'un paramètre variable x, que l'on fera tendre vers l'infini.

Et l'on se proposera de mettre en évidence, par des développements asymptotiques appropriés, l'allure que ce mouvement du paramètre x impose aux fonctions définies par l'équation différentielle.

* * *

D'abord, la troisième partie étudiera la structure des solutions formelles de l'équation différentielle (11).

Pour montrer la dépendance qui existe entre cette troisième partie et la seconde, signalons cette propriété (nouvelle) que ces solutions formelles sont constituées d'un produit de deux facteurs, facteur principal et facteur secondaire; et que le facteur principal est de la forme

$$e^{\int \varphi dz}$$

où φ est un polynome en x qui, dans le cas général, est égal à la partie principale d'une racine Φ de l'équation algébrique (15).

* * *

Enfin, la quatrième et dernière partie démontrera que ces solutions formelles, construites dans la troisième partie, permettent de développer asymptotiquement les solutions exactes de l'équation (11) et de l'équation (16).

* * *

La littérature mathématique, abondante pour les développements asymptotiques dans les équations différentielles *sans* paramètre variable, est bien peu nombreuse pour les équations *avec* paramètre variable.

Après les théorèmes bien connus de M. Poincaré (*) et de M. Picard (**), qui s'appliquent au cas où les coefficients $P_0\ P_1 \ldots P_n$ sont holomorphes pour $x = \infty$, sans que P_0 s'annule pour cette valeur $x = \infty$, et qui annoncent que dans ce cas la solution y est également holomorphe pour $x = \infty$, si les conditions initiales le sont,

après ces théorèmes, nous n'avons rencontré que les deux beaux mémoires de J. Horn publiés dans le tome LII des *Mathematische Annalen* (1899). Ces mémoires se limitent aux équations différentielles du deuxième ordre et emploient des méthodes qui ne suffisent plus pour les ordres supérieurs.

(*) H. Poincaré, *Acta mathematica*, t. XIII (1890), p. 9.

(**) E. Picard, *Traité d'analyse*, 2me édition, t. III, p. 88.

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

DANS

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A

PARAMÈTRE VARIABLE

PREMIÈRE PARTIE

Calcul des classes et calcul asymptotique.

CHAPITRE PREMIER

CALCUL DES CLASSES DE FONCTIONS.

§ 1. *Opérations logiques.*

1. Dans tout ce qui suit, une lettre surmontée d'un trait horizontal représentera, non pas un nombre ou une fonction déterminée, mais toute une classe de nombres ou de fonctions.

2. Par exemple :

$\bar{n}$ = ensemble des nombres entiers, ou classe des fonctions dont les valeurs numériques sont des nombres entiers.

$\bar{P}$ = ensemble des nombres ≥ 0 (ou classe des fonctions...)

$\overline{\theta}$ = intervalle de 0 à 1, frontières comprises.
$\overline{\lambda}$ = ensemble des nombres dont le module est ≤ 1.
$\overline{I(z_1 z_2)}$ = classe des fonctions indépendantes de z_1 et de z_2.
$\overline{\varepsilon(t)}$ = classe des fonctions qui tendent vers zéro en même temps que t.

3. L'algèbre de la logique de Leibnitz, retrouvée et développée par Boole et Schröder, comporte trois opérations sur les classes (classes de fonctions ou d'êtres quelconques) : la *multiplication* et l'*addition* logiques et la *négation*.

4. La multiplication logique de deux classes $\overline{a}\ \overline{b}$, que, afin d'éviter toute confusion avec la multiplication mathématique, nous appellerons *intersection* des deux classes $\overline{a}\ \overline{b}$, est la classe

$$\overline{a \frown b}$$

formée de tous les éléments contenus *à la fois* dans $\overline{a}$ et dans $\overline{b}$.

De même l'intersection

$$\overline{a \frown b \frown c}$$

de $\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$ est la classe formée de tous les éléments qui appartiennent à la fois à $\overline{a}$ *et* à $\overline{b}$ *et* à $\overline{c}$.

5. L'addition logique de deux classes $\overline{a}\ \overline{b}$, que nous appellerons *réunion* des deux classes $\overline{a}\ \overline{b}$, est la classe

$$\overline{a \smile b}$$

formée de tous les éléments contenus *soit* dans $\overline{a}$, *soit* dans $\overline{b}$.

De même la réunion

$$\overline{a \smile b \smile c}$$

de $\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$ est la classe formée de tous les éléments qui appartiennent ou bien à $\overline{a}$ *ou bien* à $\overline{b}$ *ou bien* à $\overline{c}$.

6. Enfin la *négation* d'une classe $\overline{a}$ est la classe

$$\overline{\overline{a}}$$

formée de tous les éléments qui n'appartiennent pas à $\overline{a}$.

Pour une théorie de ces trois opérations nous renverrons au petit ouvrage de M. Couturat (*).

7. Nous signalerons seulement les formules de De Morgan, qui permettent de définir l'une des deux opérations : *intersection* ou *réunion* au moyen de l'autre et de la *négation* :

$$\overline{a \smile b} = \text{négation de } \overline{\overline{a} \frown \overline{b}}$$

$$\overline{a \frown b} = \text{négation de } \overline{\overline{a} \smile \overline{b}}$$

et plus généralement :

$$\overline{a \smile b \smile c} = \text{négation de } \overline{\overline{a} \frown \overline{b} \frown \overline{c}}$$

$$\overline{a \frown b \frown c} = \text{négation de } \overline{\overline{a} \smile \overline{b} \smile \overline{c}}$$

etc.

(*) Louis Couturat : L'*Algèbre de la logique*. Collection Scientia. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Il suffira de considérer seulement l'*interprétation conceptuelle* (i. c.). Comme M. Couturat ne considère pas simultanément les opérations logiques et les opérations mathématiques, il a pu, sans inconvénient, employer les signes ordinaires de l'algèbre $\times + <$ au lieu des signes $\frown\ \smile$ introduits par Peano, et du signe $\dotplus$ de Schröder que nous définirons plus loin.

§ 2. *Opérations mathématiques sur les classes.*

8. Notre calcul, au lieu de s'étendre à tous les concepts possibles, va se limiter aux classes de nombres et de fonctions. En ce sens il sera moins général que le calcul logique de Boole, Schröder et Couturat. Mais, d'autre part, nous pourrons considérer d'autres opérations que les trois opérations logiques que nous venons de définir. Nous pourrons considérer toute espèce d'opération mathématique sur les classes. Et ces opérations seront pour nous beaucoup plus importantes que les opérations logiques.

9. L'opération mathématique

$$F(\alpha_1\alpha_2 \ldots \beta_1\beta_2 \ldots) \qquad (1)$$

ayant été définie pour toutes les fonctions $\alpha_1\alpha_2\ldots$ qui appartiennent à la classe $\overline{a}$; et pour toutes les fonctions $\beta_1\beta_2\ldots$ qui appartiennent à la classe $\overline{b}$; ..., nous représenterons par

$$F(\overline{a}, \overline{a}, \ldots \overline{b}, \overline{b}, \ldots) \qquad (2)$$

la classe composée de toutes les fonctions de la forme (1), où :

$\alpha_1\alpha_2 \ldots$ sont des fonctions, *égales* ou *inégales*, appartenant à $\overline{a}$,

$\beta_1\beta_2 \ldots$ des fonctions, égales ou inégales, appartenant à $\overline{b}$,

etc.

10. Par exemple :

$$3 + 5\theta \qquad (1)$$

représentera tous les nombres de la forme $3 + 5\,\theta$, où θ est un nombre arbitraire renfermé dans $\overline{0,1}$, c'est-à-dire un nombre compris entre 0 et 1 (inclusivement). Donc (1) représentera l'intervalle (3,8).

11. Autre exemple :

$$\overline{\theta} - \overline{\theta} \qquad (1)$$

représentera l'ensemble des nombres de la forme $\theta_1 - \theta_2$ où θ_1 et θ_2 sont des nombres quelconques renfermés dans $\overline{\theta}$. Donc (1) représentera l'intervalle $(-1, +1)$.

12. Insistons sur ce point que le symbole

$$F(\overline{a}, \overline{a}, \overline{a}) \qquad (1)$$

représente, non pas seulement la classe des fonctions

$$F(\alpha, \alpha, \alpha) \qquad (2)$$

où α est une fonction quelconque de $\overline{a}$, mais bien la classe de toutes les fonctions

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \qquad (3)$$

où $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ sont trois fonctions quelconques, *égales ou inégales*, appartenant à $\overline{a}$.

13. Si l'on voulait considérer l'opération (2) au lieu de (3), on ferait, non pas le calcul des classes, mais le calcul des fonctions variables dans une classe. Et l'on n'aurait, pour indiquer cette opération, qu'à supprimer les barres horizontales dans le symbole (1), ce qui n'aurait aucun inconvénient, puisque ce calcul n'est pas autre chose que le calcul ordinaire.

14. En définitive, le même symbole $\overline{a}$, dans notre notation, représente indistinctement l'une ou l'autre des fonctions $a_1a_2a_3 \ldots$ de la classe $\overline{a}$.

En supprimant tous ces indices différents pour les rempla-

cer par un simple trait horizontal, on obtiendra un résultat évidemment moins riche en détails, mais on gagnera énormément en simplicité.

Et cela sera souvent d'un très grand avantage, surtout pour les recherches et les démonstrations.

§ 3. *Équations aux classes.*

15. Pour exprimer qu'une classe $\bar{a}$ est renfermée dans une classe $\bar{b}$, c'est-à-dire que tous les éléments de $\bar{a}$ appartiennent à $\bar{b}$, Schröder emploie la notation

$$\bar{a} + \bar{b}.$$

16. Cette relation a des propriétés formelles analogues à celles de la relation mathématique $<$ (plus petit que) ou plus exactement $\leq$; notamment celle de n'être pas symétrique; et celle, fondamentale, que les deux relations simultanées

$$\bar{a} + \bar{b} \qquad \bar{b} + \bar{c}$$

entraînent

$$\bar{a} + \bar{c}.$$

17. La notation

$$\bar{a} +\!+ \bar{b}$$

signifiera que les deux classes sont équivalentes, c'est-à-dire que l'on a simultanément

$$\bar{a} + \bar{b} \qquad \bar{a} + \bar{b}.$$

18. Il est facile de voir que des inclusions de même sens

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\neq b_1 \\ a_2 &\neq b_2 \\ a_3 &\neq b_3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

peuvent se combiner membre à membre, de façon quelconque; c'est-à-dire que, quelle que soit l'opération F, les relations (1) entraînent :

$$F(\overline{a}_1\,\overline{a}_2\,\overline{a}_3) \neq F(\overline{b}_1\,\overline{b}_2\,\overline{b}_3). \qquad (2)$$

19. Mais si l'on veut, dans une inclusion, faire passer un terme d'un membre dans l'autre — comme on peut le faire dans une relation algébrique, en changeant simplement le signe du terme —, la chose se complique.

Pour pouvoir commodément transformer une inclusion, sans diminuer sa portée, il importe de distinguer par un signe les termes qui proviennent de l'un ou l'autre membre.

La relation

$$\overline{a} \neq \overline{b} \qquad (1)$$

exprime que n'*importe quel élément de* $\overline{a}$ est égal à *un certain élément de* $\overline{b}$.

Représentons la première expression soulignée par le symbole

$$\overline{\underline{a}},$$

et la deuxième expression par le symbole

$$\overline{\underline{b}}.$$

Alors l'inclusion (1) sera représentée par l'égalité

$$\overline{\underline{a}} = \overline{\underline{b}}. \qquad (2)$$

20. D'une manière plus générale, la notation

$$f\left(\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{A}}\ldots\overline{\mathrm{B}}\ldots\overline{\overline{a}}\,\overline{\overline{a}}\ldots\overline{\overline{b}}\ldots\right)=0 \qquad (1)$$

signifiera que, $A_1A_2\ldots$ étant des fonctions choisies comme on voudra dans la classe $\overline{A_1}$; B_1, ... comme on voudra dans la classe $\overline{B}$, ... etc.; la notation (1) signifiera qu'il est possible de trouver des fonctions a_1a_2 ... appartenant à $\overline{a}$, des fonctions b_1, ... appartenant à $\overline{b}$, ... etc., de façon à satisfaire à la relation

$$f(A_1A_2\ldots B_1\ldots a_1a_2\ldots b_1\ldots\ldots)=0. \qquad (2)$$

21. En respectant les accents, on pourra, maintenant, effectuer sur les équations telles que (1) les mêmes transformations que sur les équations ordinaires.

22. On pourra en outre effectuer, sur ces équations (1), les substitutions suivantes :

1° Remplacer une classe à accent aigu par une classe — à laquelle on donnera même accent — qui y soit contenue, ou par une fonction qui y soit contenue;

2° Remplacer une classe à accent grave, ou une fonction, par une classe qui la contienne et à qui on devra donner l'accent grave;

3° Enfin on pourra remplacer un accent aigu par un accent grave.

De toutes ces substitutions, il n'y a que le remplacement d'une classe par une classe équivalente, avec même accent, qui soit réversible.

23. Il va sans dire que les transformations non réversibles diminuent la portée de la relation et ne doivent être employées que si elles s'excusent par une simplification.

§ 4. *Emploi des classes.*

24. Dans la plupart des relations que nous aurons à considérer, il n'entrera pas d'autre accent que l'accent grave. Nous supprimerons alors cet accent, puisque cela n'entraînera aucune ambiguité.

25. Par exemple, pour exprimer la relation

$$a \gtrless b,$$

on écrira

$$a = b + \overline{\mathrm{P}}.$$

Et en remplaçant ainsi une inégalité par une égalité, on rendra les calculs plus faciles.

26. La relation

$$a < b$$

pourra se représenter par

$$a = b + \overline{\mathrm{P}\ \breve{o}}.$$

Si la classe $\overline{\mathrm{P}\ \breve{o}}$ devait être souvent employée, on la représenterait par un signe spécial, par exemple par $\overline{\mathrm{Q}}$ (lettre employée par Peano).

27. Lorsqu'une fonction $f(x)$ tendra vers une limite **A** pour $x = a$, on aura la relation :

$$f(x) = \mathrm{A} + \overline{\varepsilon(x - a)},$$

ou en abrégé

$$f(x) = \mathrm{A} + \overline{\varepsilon}.$$

28. Veut-on faire entrer dans un calcul la condition que la convergence de $f(x)$ vers A est uniforme par rapport à un paramètre z? On utilisera la relation

$$f(x) = \mathrm{A} + \overline{\lambda} \,.\, \overline{\varepsilon(x-a)}^{\frown} \overline{1(z)}$$

ou en abrégé

$$f(x) \doteq \mathrm{A} + \overline{\lambda} \,.\, \overline{\varepsilon}^{\frown} \overline{\mathrm{I}}.$$

29. Il arrive souvent que, pour chaque valeur déterminée de $yz\ldots$, le module d'une fonction $|f(xyz\ldots)|$ est borné quand x varie dans son domaine. On aura alors

$$f(x, y, z\ldots) = \overline{\lambda} \,.\, \overline{1(x)}^{\frown} \dot{\infty}.$$

30. Si le module était borné à la fois par rapport à toutes les variables $x, y, z \ldots$, on écrirait

$$f(x, y, z\ldots) = \overline{\lambda} \,.\, \overline{1(x, y, z\ldots)},$$

etc.

CHAPITRE II.

Congruences généralisées.

31. Étant donnée une classe

$$\overline{00}$$

qui entre dans une ou plusieurs relations de la forme

$$\overline{a} = \overline{b} + \overline{00},$$

nous dirons que cette classe $\overline{00}$ forme une *base*, si la somme, la différence, le produit de deux fonctions quelconques de $\overline{00}$, appartient aussi à $\overline{00}$.

Telles sont par exemple :
d'abord la classe composée du seul nombre 0,
ensuite les classes :

$$\overline{n} \qquad \overline{\mathrm{I}(x)} \qquad \overline{\varepsilon(x)} \qquad \overline{\ddot{\infty}}$$

et encore, m étant un entier donné, la classe $m \,.\, \overline{n}$ des multiples de m.

32. Nous appellerons *zone* de la base $\overline{00}$ la classe $\overline{z}$ définie par

$$\overline{\frac{\prime}{z}} \,.\, \overline{\frac{\prime}{00}} = \overline{\frac{\backslash}{00}}.$$

Autrement dit, une fonction f sera dite appartenir à la zone $\overline{z}$, quand son produit, par une fonction quelconque de $\overline{00}$, sera encore une fonction de $\overline{00}$.

33. Si, par exemple, la base se réduit au seul nombre zéro, la zone sera formée de tous les nombres finis et de toutes les fonctions finies en chaque point de leur domaine.

34. Si, au contraire, la base est la classe $m \,.\, \overline{n}$ des multiples de l'entier m, la zone sera l'ensemble $\overline{n}$ des nombres entiers. Et une relation

$$\alpha = \beta + m \,.\, \overline{n}$$

où α et β sont dans cette zone $\overline{n}$, sera équivalente à la congruence de Gauss :

$$\alpha \equiv \beta \pmod{m}.$$

35. Les relations, ou systèmes de relations, de la forme

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_1 + \overline{00} \\ a_2 &= b_2 + \overline{00} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où l'on ne considère que des fonctions appartenant à la zone $\overline{z}$, constituent donc une généralisation des congruences de Gauss.

36. Il est facile de voir que, en combinant ces relations membre à membre, par addition, soustraction ou multiplication, on obtient encore des relations de même forme.

Pour l'addition et la soustraction, cela résulte, en effet, 1° de ce que, si a_1 et a_2 sont dans la zone, il en est de même de $a_1 + a_2$ et de $a_1 - a_2$, c'est-à-dire que

$$\frac{\prime}{z} \pm \frac{\prime}{z} = \frac{\setminus}{z}$$

et 2° de ce que

$$\frac{\prime}{00} \pm \frac{\prime}{00} = \frac{\setminus}{00}.$$

37. Quant à la multiplication, si l'on multiplie membre à membre les deux premières relations (1), on obtient

$$a_1 a_2 = b_1 b_2 + b_1 \overline{00} + b_2 \overline{00} + \overline{00}. \qquad (2)$$

Mais comme, ainsi qu'il est facile de le vérifier,

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z},$$

les termes $a_1 a_2$ et $b_1 b_2$ seront dans la zone, et, de plus, puisque b_1 et b_2 sont dans la zone, les trois derniers termes de (2) se réduisent à $\overline{00}$. Donc, en multipliant membre à membre les deux relations (1), l'on obtient

$$a_1 a_2 = b_1 b_2 + \overline{00}$$

où $a_1 a_2$ et $b_1 b_2$ sont dans la zone. C. Q. F. D.

38. Enfin, si les inverses de $\overline{a}$ et $\overline{b}$ sont dans la zone, la relation

$$a = b + \overline{00}$$

entraînera

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \overline{00}.$$

Car on aura

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = (b - a) \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \overline{00} \cdot \overline{z} \cdot \overline{z}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \overline{00}.$$

C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

Calcul asymptotique.

§ 1. *Définitions.*

39. Nous aurons à considérer trois variables indépendantes x, z, j.

La variable x parcourra, dans l'ensemble donné $\overline{E}$, toutes les valeurs dépassant un certain nombre positif x_0, indépendant de x et de z. On pourra, selon les besoins, choisir ce nombre fini x_0 aussi grand qu'on voudra, si bien qu'en définitif on ne considérera l'ensemble $\overline{E}$ que dans le voisinage de $x = +\infty$. Il faudra donc que l'ensemble $\overline{E}$ possède des points au delà de n'importe quel nombre positif. Autrement dit, l'ensemble $\overline{E}$ doit admettre le point $+\infty$ comme point d'accumulation.

Ce sera, par exemple, l'ensemble des nombres plus grands que l'unité; ou bien encore l'ensemble des nombres entiers positifs; etc.

40. La variable z est celle par rapport à laquelle s'effectueront les dérivations

$$D = \frac{d}{dz}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dz^2}, \ldots$$

qui entreront dans nos équations différentielles.

Nous supposerons que le domaine de cette variable z est un intervalle réel $z_1 z_2$ $(z_1 < z_2)$.

Le cas où l'on voudrait faire parcourir à z un arc $z_1 z_2$ de la

courbe C, dessinée dans le plan représentatif des imaginaires, se ramène facilement au cas de l'intervalle réel.

Supposons en effet que l'on ait

$$z = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

La courbe C sera donnée par les expressions des coordonnées $\alpha\beta$ en fonction d'un paramètre réel z'.

$$\alpha = f(z') \qquad \beta = g(z').$$

La substitution

$$z = f(z') + g(z')\sqrt{-1}$$

permettra de considérer, au lieu de z, la variable *réelle* z' parcourant l'intervalle réel $z'_1 z'_2$.

41. Enfin la troisième variable que nous aurons à considérer, la variable j, ne prendra que des valeurs entières, positives. Nous l'appellerons le *numéro* de la fonction.

Comme exemple de fonction de ces trois variables $x\,z\,j$, exemple que nous rencontrerons souvent, nous citerons la somme des j premiers termes de la série, convergente ou divergente :

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

où les a ne dépendent que de z.

Fonction asymptotiquement nulle.

42. Nous dirons qu'une fonction $f(x\,z\,j)$ (*) est asymptotiquement nulle si, pour chaque valeur de j dépassant un certain

(*) Par exemple $f(xzj) = \left(\frac{1}{x}\right)^j$ ou bien $f(xzj) = c^{-x}$

nombre j_0, la fonction $f(xzj)$ tend vers zéro, uniformément par rapport à z, quand x tend vers l'infini (dans E).

Et si en outre :

1° Pour chaque valeur de j dépassant un certain nombre j_1, le produit $x, f(xzj)$ tend vers zéro, uniformément par rapport à z, quand x tend vers l'infini (dans $\overline{\mathrm{E}}$) ;

2° Pour chaque valeur de j dépassant un certain nombre j_2, le produit $x^2, f(xzj)$ tend vers zéro, uniformément par rapport à z, quand x tend vers l'infini (dans $\overline{\mathrm{E}}$).

Etc.

En un mot, la fonction $f(xzj)$ sera asymptotiquement nulle si, quel que soit n, l'on peut trouver un nombre j_n tel que, pour toute valeur de j dépassant j_n, l'on ait

$$x^n f(xzj) = \overline{\lambda} \,.\, \overline{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)}^{\frown} \overline{\mathrm{I}(z)}. \tag{1}$$

43. Remarquons que la relation (1) entraîne

$$x^n f(xzj) = \overline{\lambda} \,.\, \overline{\mathrm{I}(x,z)}^{\frown} \overline{\dot{\infty}}$$

et que, réciproquement, si, quel que soit N, l'on peut trouver un nombre j_{N} tel que, pour $j > j_{\mathrm{N}}$, l'on ait

$$x^{\mathrm{N}} f(xzj) = \overline{\lambda} \,.\, \overline{\mathrm{I}(x,z)}^{\frown} \overline{\dot{\infty}},$$

alors, en posant

$$\mathrm{N} = n + 1,$$

l'on aura

$$x^n f(xzj) = \frac{\overline{\lambda} \,.\, \overline{\mathrm{I}(x,z)}^{\frown} \overline{\dot{\infty}}}{x} = \lambda \,.\, \overline{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)}^{\frown} \overline{\mathrm{I}(z)}.$$

Donc on peut remplacer la première définition par la suivante :

44. Une fonction $f(xzj)$ est asymptotiquement nulle si, à tout nombre positif N, on peut faire correspondre un nombre j_N tel que, pour tout numéro j dépassant j_N, l'on ait

$$f(x, z, j) = \frac{\overline{\lambda} \cdot \overbrace{\overline{1(x, z)} \quad \ddot{\infty}}}{x^N}, \tag{2}$$

quel que soit $x > x_0$ dans $\overline{E}$.

45. Toutes les fonctions asymptotiquement nulles que nous considérerons dans la suite seront indéfiniment dérivables par rapport à z, et toutes leurs dérivées successives par rapport à z seront elles-mêmes asymptotiquement nulles.

Nous représenterons désormais par

$$\overline{00}$$

la classe de ces fonctions.

46. Nous dirons que deux fonctions u, v sont *asymptotiquement égales*, lorsque leur différence $(u - v)$ sera asymptotiquement nulle. Donc lorsque

$$u - v = \overline{00}$$

ou

$$u = v + \overline{00},$$

relation que l'on pourra, si l'on veut, représenter en abrégé par

$$u \equiv v.$$

47. Il est facile de voir que cette classe $\overline{00}$ est une base au sens du n° 31 et que sa zone renferme, entre autres, toutes les fonctions formées en prenant un nombre de termes fini, mais pouvant croître indéfiniment avec j, dans une série telle que

$$u_0 x^{\alpha_0} + u_1 x^{\alpha_1} + u_2 x^{\alpha_2} + \cdots$$

où les u et les α sont de la forme

$$\overline{\lambda} \,.\, \overline{\mathrm{I}(x, z)}^{\frown}\overline{\infty},$$

ainsi que leurs dérivées successives prises par rapport à z.

On pourra appliquer à cette base et à sa zone $\overline{z}$ toute la théorie et toutes les formules du chapitre précédent.

Nous ajouterons les remarques suivantes :

PREMIÈRE REMARQUE.

48. Deux fonctions étant égales asymptotiquement, si l'une est dans la zone, l'autre y sera aussi.

Démonstration.

On a

$$\overline{\overset{\prime}{00}} = \overline{\overset{\setminus}{00}},$$

$$f = g + \overline{\overset{\setminus}{00}},$$

donc, en multipliant membre à membre,

$$f \,.\, \overline{\overset{\prime}{00}} = g \,.\, \overline{\overset{\setminus}{00}} + \overline{\overset{\setminus}{00}},$$

ou, puisqu'on suppose que g est dans la zone

$$f \,.\, \overline{\overset{\prime}{00}} = \overline{\overset{\setminus}{00}},$$

c'est-à-dire que f est dans la zone. C. Q. F. D

SECONDE REMARQUE.

49. Deux fonctions étant égales asymptotiquement, si l'inverse de l'une est dans la zone, l'inverse de l'autre y sera aussi.

Démonstration.

Supposons donc

$$f = g + \overline{00}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{g} = \bar{z}. \tag{2}$$

On a

$$\frac{1}{f} = \frac{g}{f} \cdot \frac{1}{g} = \frac{g}{f} \cdot \bar{z}; \tag{3}$$

or, de (1) on tire

$$\frac{f}{g} = 1 + \overline{00}\,\frac{1}{g},$$

ou, à cause de (2),

$$\frac{f}{g} = 1 + \overline{00}.$$

Donc

$$\frac{g}{f} = \frac{1}{1 + \overline{00}} = \bar{z}\ (*).$$

Par suite, (3) devient

$$\frac{1}{f} = \bar{z} \cdot \bar{z} = \bar{z}.$$

C. Q. F. D

(*) Se démontre en s'appuyant sur les définitions des nos 32 et 44.

§ 2. *Intégration.*

PREMIER THÉORÈME.

50. Si une fonction est asymptotiquement nulle, son intégrale sera asymptotiquement nulle.

En termes précis, si

$$f = \overline{00},$$

on aura

$$\int_{z_0}^{z} f dz = \overline{00},$$

z_0 et z étant deux points du domaine $\overline{D(z)}$ (c'est-à-dire l'intervalle $3_1 3_2$).

Démonstration.

Il suffira de supposer $M = 1$ dans la généralisation qui sera donnée au n° 54.

Corollaire :

51. Si

$$g = h + \overline{00},$$

on aura

$$\int_{z_0}^{z} g dz = \int_{z_0}^{z} h dz + \overline{00}.$$

Il suffit en effet de poser $g - h = f$ pour être ramené au théorème qui précède.

Second théorème.

52. Si une fonction est dans la zone, son intégrale sera dans la zone.

En termes précis, si

$$f = \overline{z},$$

on aura

$$\int_{z_0}^{z} f dz = \overline{z}.$$

(z_0 et z dans $\overline{\mathrm{D}}$).

Démonstration.

Supposer $\mathrm{M} = 1$ dans le n° 55.

Généralisation.

53. Soit $\mathrm{M}(x, z, j)$ une fonction telle que, pour chaque valeur fixe de x choisie dans $\overline{\mathrm{E}}$, et pour chaque valeur fixe de j suffisamment grande, le module $|\mathrm{M}|$ soit non décroissant quand z varie de z_1 à z_2 ($z_1 < z_2$ ou $z_1 > z_2$) (*).

Nous allons pouvoir généraliser les deux théorèmes précédents, en y remplaçant :

la classe $\overline{00}$ par la classe M. $\overline{00}$

et la classe $\overline{z}$ par la classe M. $\overline{z}$.

Généralisation du premier théorème.

54. M satisfaisant à la condition précédente, je dis que la relation

$$f = \mathrm{M} \,.\, \overline{00} \qquad (1)$$

(*) Telle est par exemple, si $z_1 < z_2$, la fonction $\mathrm{M} = e^{x^2 - x}$. Cette fonction n'est pas dans la zone.

entraînera

$$\int_{z_1}^{z} f dz = \mathrm{M} \,.\, \overline{00}. \tag{2}$$

Démonstration.

A cause de (1) on pourra, quel que soit N, lui faire correspondre un j_0 tel que, pour $j > j_0$, l'on ait

$$\frac{1}{\mathrm{M}} f = \frac{\overline{\lambda} \,.\, \overline{\mathrm{I}}}{x^{\mathrm{N}}} \tag{3}$$

où $\overline{\mathrm{I}}$ est une abréviation de

$$\overline{\mathrm{I}(x, z)} \frown \overline{\infty}.$$

De (3) l'on déduit

$$f = \frac{\overline{\lambda} \,.\, \overline{\mathrm{I}}}{x^{\mathrm{N}}} \,.\, \mathrm{M},$$

et, par suite,

$$\int_{z_1}^{z} f dz = \frac{\overline{\mathrm{I}}}{x^{\mathrm{N}}} \int_{z_1}^{z} \overline{\lambda} \,.\, |\mathrm{M}| \, dz. \tag{4}$$

Mais par l'hypothèse du n° 53, la plus grande valeur de $|\mathrm{M}|$ dans $(z_1 z)$ est celle atteinte en z. Donc

$$\int_{z_1}^{z} \overline{\lambda} \,.\, |\mathrm{M}| \,.\, dz = \mathrm{M} \int_{z_1}^{z} \overline{\lambda} dz = \mathrm{M} \,.\, \overline{\lambda}(z - z_1) = \mathrm{M} \,.\, \overline{\lambda}(z_2 - z_1) = \mathrm{M} . \overline{\lambda} \,.\, \overline{\mathrm{I}}.$$

Et par suite (4) devient pour tout $j > j_0$,

$$\int_{z_1}^{z} f dz = \frac{\overline{\lambda} \,.\, \overline{\mathrm{I}}}{x^{\mathrm{N}}} \,.\, \mathrm{M},$$

ce qui démontre la formule (2).

GÉNÉRALISATION DU SECOND THÉORÈME

55. La fonction M satisfaisant à la condition du n° 53, je dis que la relation

$$f = \mathrm{M} \,.\, \overline{z}$$

entraînera

$$\int_{z_1}^{z} f dz = \mathrm{M} \,.\, \overline{z}.$$

(z_1 et z dans $\overline{\mathrm{D}}$).

Démonstration.

56. Il faut démontrer que

$$\frac{1}{\mathrm{M}} \int_{z_1}^{z} f dz = \overline{z}.$$

Donc il faut démontrer que pour toute fonction α de $\overline{00}$ l'on a

$$\alpha \cdot \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot \int_{z_1}^{z} f dz = \overline{00}.$$

En d'autres termes, il faut montrer que, quel que soit le nombre positif N, on pourra trouver un nombre j_0 tel que pour tout $j > j_0$ l'on ait

$$\alpha \cdot \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot \int_{z_1}^{z} f dz = \frac{\overline{\lambda} \,.\, \overline{\mathrm{I}}}{x^{\mathrm{N}}} \qquad (1)$$

où $\overline{\mathrm{I}}$ est une abréviation de

$$\overline{\mathrm{I}(x, z)} \quad \overline{\infty}.$$

57. Or, puisque

$$\alpha = \overline{00},$$

on pourra, *quel que soit le nombre positif* n, lui faire correspondre un nombre positif J(n) tel que pour $j > \mathrm{J}(n)$ l'on ait

$$\alpha = \frac{\overline{\lambda} \cdot \overline{\mathrm{I}}}{x^n}. \tag{2}$$

58. Remarquons que cette fonction J(n) peut être supposée non décroissante quand n croît : c'est ce que nous supposerons.

59. Donc pour $j > \mathrm{J}(n)$ on aura, en vertu de (2),

$$\alpha \cdot \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot \int_{z_1}^{z} f dz = \frac{\overline{\lambda}\,\overline{\mathrm{I}}}{x^n} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}} \int f dz. \tag{3}$$

60. Cela posé, à chaque valeur de j faisons correspondre le nombre positif K satisfaisant à la relation

$$\mathrm{J}(\mathrm{K}) = j. \tag{4}$$

A cause du n° 58, K sera une fonction de j qui croîtra avec j au delà de toute limite.

Il s'ensuit que l'on aura

$$\frac{1}{x^{\mathrm{K}}} = \overline{00}.$$

Et puisque

$$\frac{1}{\mathrm{M}} f = \overline{z},$$

l'on aura, en multipliant membre à membre,

$$\frac{1}{x^{\mathrm{K}}} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot f = \overline{00}.$$

Donc on pourra trouver un nombre j_0 tel que pour $j > j_0$ l'on ait

$$\frac{1}{x^{K}} \cdot \frac{1}{M} \cdot f = \frac{\overline{\lambda} \cdot \overline{I}}{x^{N}}. \qquad (5)$$

61. Remarquons que ce nombre j_0 ne change pas quand on change la valeur de n.

En effet, (5) fera connaître ce nombre quand on connaîtra N et la fonction $K(j)$.

Mais cette fonction $K(j)$ est par (4) déterminée quand on connaît la loi de correspondance entre une variable v et la fonction $J(v)$; et cette correspondance est déterminée au n° 57, dès qu'on connaît la fonction α, sans qu'on soit obligé de prendre telle valeur de n plutôt qu'une autre.

62. De (5) on déduit

$$f = \overline{\lambda} \cdot \overline{I} \cdot \frac{x^{K}}{x^{N}} \cdot M.$$

Donc

$$\int_{z_1}^{z} f dz = \overline{I} \frac{x^{K}}{x^{N}} \int_{z_1}^{z} \overline{\lambda} \mid M \mid dz. \qquad (6)$$

Sur cette dernière intégrale, répétons un raisonnement fait au n° 54 :

En vertu de l'hypothèse du n° 53, la plus grande valeur de $\mid M \mid$ dans $z_1 z$ est celle atteinte en z. Donc

$$\int_{z_1}^{z} \overline{\lambda} \mid M \mid dz = \overline{\lambda} M \int_{z_1}^{z_2} \mid dz \mid = \overline{\lambda} \cdot M \cdot I.$$

Donc (6) devient

$$\int_{z_1}^{z} f dz = \overline{\lambda} \cdot \overline{I} \frac{x^{K}}{x^{N}} \cdot M. \qquad (7)$$

Portons cette valeur dans (3), nous aurons que pour $j > j_0$ (nombre j_0 déterminé au n° 61) l'on aura

$$\alpha \cdot \frac{1}{M} \cdot \int_{z_1}^{z} f dz = \overline{\lambda} \cdot \overline{I} \cdot \frac{x^K}{x^n \cdot x^N}. \qquad (8)$$

63. Cette formule suppose que les valeurs données à n et N sont arbitraires, mais fixes. Tandis qu'au contraire K est une fonction de j déterminée par (4).

Si nous considérons pour n une suite de valeurs telles que $n_1 n_2 n_3 \ldots$, la formule (8) sera applicable pour chacune de ces valeurs; seulement la fonction représentée par $\overline{I}$ variera avec la valeur de n. Ce sera une fonction $\varphi(j, n)$ telle que, pour *chaque* valeur fixe de n, l'on aura

$$\varphi(j, n) = \overline{\overline{I(x, z)} \cdot \overline{\infty}}.$$

Si l'on donne à n des valeurs variables avec j, selon une fonction de j *indépendante* de x et z (et finie pour chaque valeur finie de j), on aura encore

$$\varphi(j, n) = \overline{\overline{I(x, z)} \cdot \overline{\infty}}.$$

Nous pouvons choisir pour cette fonction de j la fonction K, donc pour

$$n = K$$

la formule (8) est encore vraie. Et l'on a ainsi

$$\alpha \cdot \frac{1}{M} \cdot \int_{z_1}^{z} f dz = \frac{1}{x^N} \cdot \overline{\lambda} \cdot \overline{I}.$$

C'est précisément la relation (1) qu'il s'agissait de démontrer, la valeur correspondante de j_0 étant celle du n° 61.

§ 3. *Fonctions pseudo-convergentes.*

DÉFINITION.

64. Nous dirons d'une fonction $u(j)$ qu'elle est *pseudo-convergente*, lorsque l'on aura

$$1^\circ \qquad u = \overline{z}\,; \tag{1}$$

$$2^\circ \qquad u(j+1) - u(j) = \overline{00}. \tag{2}$$

Telle est, par exemple, la fonction u formée par la somme des j premiers termes de la série

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots$$

où les a sont de la forme

$$a = \overline{\lambda}\,.\,\overline{\mathrm{I}(x, z, j)}\ (*).$$

PROPRIÉTÉ.

65. De la condition (2) l'on déduit que l'on a, quel que soit l'entier p,

$$u(j+p) - u(j) = \overline{00}.$$

Par conséquent, si à chaque numéro j l'on fait correspondre un numéro $\mathrm{J}(j)$ de façon que $\mathrm{J}(j)$ tende vers l'infini en même temps que j, l'on aura

$$u[\mathrm{J}(j)] = u[j] + \overline{00}.$$

(*) Il y a des fonctions qui sont dans la zone, sans être pseudo-convergentes. Par exemple, les fonctions x^{mj}, x^{mj^2}, x^{mj^3}, etc.

Conséquence.

66. Si $f(uvw\ldots)$ est un polynome en $uvw\ldots$ à coefficients appartenant à la zone et si l'on représente par $u_1v_2w_3\ldots$ ce que deviennent les fonctions pseudo-convergentes $uvw\ldots$ quand on remplace dans chacune d'elles le numéro j respectivement par les numéros $J_1(j)$, $J_2(j)$, ... qui tendent vers l'infini en même temps que j, l'on aura

$$f(u_1v_2w_3\ldots) = f(uvw\ldots) + \overline{00}.$$

Opérations du groupe.

67. Représentons par $\bar{c}$ la classe des fonctions pseudo-convergentes.

Je dis que la somme, la différence, le produit de deux fonctions de la classe $\bar{c}$ seront encore des fonctions de la classe $\bar{c}$.

Démonstration.

Posons

$$u(j+1) - u(j) = \Delta u.$$

Pour que

$$u = \bar{c}$$

il faut et suffit que l'on ait à la fois

$$u = \bar{z} \qquad \Delta u = \overline{00}.$$

D'après cela, on voit immédiatement que les relations

$$u = \bar{c} \qquad v = \bar{c} \tag{1}$$

entraînent

$$\left.\begin{aligned} u + v &= \bar{c} \\ u - v &= \bar{c}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Démontrons que ces relations (1) entraînent aussi

$$uv = \bar{c}, \tag{3}$$

c'est-à-dire

$$uv = \bar{z} \qquad \Delta uv = \overline{00}. \tag{4}$$

La première de ces deux relations résulte de ce que u et v sont dans la zone.

Démontrons la deuxième :

$$\Delta uv = u(j+1) \,.\, \Delta v(j) + v(j) \,.\, \Delta u(j)$$
$$\Delta uv = \bar{z} \,.\, \overline{00} + \bar{z} \,.\, \overline{00}$$
$$\Delta uv = \overline{00}.$$

C. Q. F. D.

INTÉGRATION.

68. Je dis enfin que si une fonction est dans la classe $\bar{c}$, son intégrale sera dans la classe $\bar{c}$.

En termes précis, les relations

$$u = \bar{z} \qquad \Delta u = \overline{00}$$

doivent entraîner

$$\int_{z_0}^{z} u dz = \bar{z} \qquad \int_{z_0}^{z} \Delta u \,.\, dz = \overline{00}.$$

Démonstration.

La première de ces deux relations résulte du n° 52 et la deuxième du n° 50.

GÉNÉRALISATION.

69. M étant défini au n° 53, si la fonction f est dans la classe $M \,.\, \bar{c}$, son intégrale $\int_{z_1}^{z} f dz$ sera dans la classe $M \,.\, \bar{c}$.

Démonstration.

Comme ci-dessus, en utilisant les nos 55 et 54.

CLASSE $\overline{\mathfrak{P}(x)}$.

70[1]. Les fonctions pseudo-convergentes que nous aurons le plus souvent à considérer seront des fonctions asymptotiquement égales à la somme des j premiers termes d'une série génératrice

$$x^m \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots \right) \qquad (1)$$

où m est un entier fixe et où $a_0 a_1 a_2$ ..... sont des fonctions de z, indépendantes de x et de j, et bornées ainsi que chacune de leurs dérivées successives prises par rapport à z.

Nous représenterons par $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ la classe de ces fonctions pseudo-convergentes particulières.

70[2]. Donc, si l'on représente par

$$\bar{a}$$

la classe des fonctions $\overline{1(x, j)}$ qui sont bornées dans l'intervalle $z_1 z_2$, ainsi que leurs dérivées premières, deuxièmes, etc., l'on aura

70[3].

$$\overline{\mathfrak{P}(x)} = X^{\overline{n-1}} \cdot \left(\bar{a} + \bar{a} \frac{1}{x} + \bar{a} \frac{1}{x^2} + \cdots + \bar{a} \frac{1}{x^j} \right) + \overline{00}. \qquad (2)$$

Exemples :

Fonctions de la classe $\overline{\mathfrak{L}(x)}$:	Séries génératrices :
$\frac{1}{x-1}$	$x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+\cdots$
$\frac{x^{m+1}}{x-1}$	$x^{m}+x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\cdots$
$1+x^{-1}+x^{-2}+\cdots+x^{-j}$	$1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+\cdots$
$x^{p}+x^{q}$ (p, q étant des entiers fixes).	$x^{p}+x^{q}$
x^{-j}	0
$x^{k}c^{-x}$.	0.

70⁴. La somme, la différence, le produit de deux fonctions $\overline{\mathfrak{L}(x)}$ sont encore des fonctions $\overline{\mathfrak{L}(x)}$. Il en est de même de l'inverse d'une fonction $\overline{\mathfrak{L}(x)}$ quand le premier terme de la série génératrice ne s'annule pas dans l'intervalle $z_1 z_2$ (frontières comprises). Auquel cas le premier coefficient de la série génératrice est une fonction de z qui reste supérieure, en module, à un nombre positif fixe, cela en raison de sa continuité, continuité assurée par l'existence d'une dérivée.

Enfin la dérivée prise par rapport à z et l'intégrale (entre z_0 et z, ces deux nombres étant dans $z_1 z_2$) d'une fonction $\overline{\mathfrak{L}(x)}$ sont encore des fonctions $\overline{\mathfrak{L}(x)}$. (Pour la dérivée, cela découle de la définition, et pour l'intégrale cela est une conséquence du n° 50.)

Série génératrice.

70⁵. La série (1) du n° 70 est dite *série génératrice* de toute fonction $u(x, z, j)$ de la forme

$$u(x,z,j) = x^{m}\cdot\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a^{j}}{x^{j}}\right)+\overline{00}.$$

Plus généralement, si k est une fonction indépendante de j, la série, convergente ou non,

$$k \,.\, x^m \,.\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right)$$

sera dite *série génératrice* de la fonction

$$k \,.\, u(x, z, j).$$

DEUXIÈME PARTIE

Irrationnelles algébriques.

CHAPITRE PREMIER

Problème formel.

§ 1. *Énoncé du problème.*

71. Nous allons nous occuper du problème suivant :
Étant donné un polygone en Φ,

$$F(\Phi) = P_0 . \Phi^n + P_1 \Phi^{n-1} + \cdots + P_{n-1}\Phi + P_n \qquad (1)$$

dont les coefficients $P_0, P_1, \ldots P_n$ sont des fonctions de la classe

$$\overline{\mathfrak{L}(x)},$$

il s'agit de satisfaire à la relation

$$F(\Phi) = \overline{00}$$

par une fonction formée avec les j premiers termes d'une série

$$A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + \cdots \qquad (3)$$

où les A et les α sont

$$\overline{I(x, j)}$$

et où

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots$$

§ 2. *Abrégé de la théorie.*

Voici la suite d'opérations qui fournira la série (3), génératrice de Φ :

72. 1° On déterminera l'ordre α_1 de Φ par la condition que dans $F\Phi$ les termes dont l'ordre est le plus élevé soient à plusieurs, afin qu'ils puissent se détruire entre eux. On trouvera que les valeurs ainsi admissibles pour α_1 sont des nombres rationnels, positifs, nuls ou négatifs. (Voir n°ˢ 82 à 85.)

Soit $\frac{p_1}{q_1}$ une telle valeur de α_1.

73. 2° Ayant choisi α_1, on déterminera A_1 en égalant à zéro la somme de ces termes d'ordre plus élevé que les autres, ce qui fournit une équation algébrique à coefficients $1(x, j)$.

$$f_1(A_1) = 0.$$

(Voir n°ˢ 87 et 88.)

74. 3° En possession du premier terme $A_1 x^{\frac{p_1}{q_1}}$ de Φ, on posera

$$x = x_1^{q_1},$$
$$\Phi = x_1^{p_1}(A_1 + \Phi_2),$$

cette substitution faite dans

$$F\Phi = \overline{00}$$

donnera une équation

$$F_2\Phi_2 = \overline{00}$$

à coefficients de la forme

$$\overline{\mathfrak{F}}(x_1),$$

équation dont il faudra chercher la ou les solutions *d'ordre inférieur à zéro.*

75. 4° On recommencera les mêmes calculs sur l'équation

$$F_2\Phi_2 = \overline{00}$$

afin de trouver le premier terme de Φ_2, c'est-à-dire qu'on déterminera l'ordre (négatif) $\frac{p_2}{q_2}$ de Φ_2, puis son premier coefficient A_2, qui sera racine d'une équation algébrique, à coefficients $\overline{I(x, j)}$

$$f_2(A_2) = 0.$$

Et ainsi de suite.

*
* *

76. La fonction $\Phi(x, j)$, formée avec les j premiers termes de la série (3) ainsi obtenue, satisfait-elle à la relation

$$F\Phi = \overline{00}?$$

On verra facilement que oui, quand on connaîtra la propriété suivante relative aux ordres $\alpha_1\alpha_2\ldots$ des termes de cette série (3).

Les exposants $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, qui sont des nombres rationnels, *peuvent être tous réduits à un même dénominateur* $M \leq n$.

De sorte qu'en posant

$$x^{\frac{1}{M}} = X,$$
$$\alpha_1 = \frac{m}{M},$$

les termes de la série (3) seront, dans le même ordre, les termes non nuls d'une série

$$X^m\left(I+\frac{I}{X}+\frac{I}{X^2}+\frac{I}{X^3}+\cdots\right) \qquad (4)$$

où I est une abréviation de $\overline{I(x,j)}$.

Et l'on voit que les ordres successifs $\alpha_1\alpha_2$ ..... tendront vers $-\infty$.

* * *

Pour démontrer cette propriété des ordres $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ ..., on raisonne comme suit :

77. 1° On prouve que $f_1(A)$ est un polynome en A^{q^1} (voir n° 89), de même que $f_2(A)$ est un polynome en A^{q^2}, etc.

On en déduit que, si A_1 est une racine de f_1 de multiplicité n_1, A_2 une racine de f_2 de multiplicité n_2, etc.,
on en déduit que

$n_1q_1 \leqq$ degré m_1 de $f_1(A)$ en A,
$n_2q_2 \leqq$ degré m_2 de $f_2(A)$ en A,

etc. Donc

$$\left.\begin{array}{l} n_1q_1 \leqq m_1 \\ n_2q_2 \leqq m_2 \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (5)$$

78. 2° On sait que le degré m_1 de f_1 est $\leqq n$, on prouve que le degré m_2 de f_2 est $\leqq n_1$. (Voir n^{os} 90 à 100.)

De même que le degré m_3 de f_3 est $\leqq n_2$,
etc. Donc

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \leqq n \\ m_2 \leqq n_1 \\ m_3 \leqq n_2 \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (6)$$

79. 3° En comparant les formules (5) et (6), on voit que

$$\left.\begin{aligned} n_1 q_1 &\gtrless n \\ n_2 q_2 &\gtrless n_1 \\ n_3 q_3 &\gtrless n_2 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

80. 4° En multipliant membre à membre les relations (7), on obtient

$$q_1 q_2 q_3 \cdots q_r \cdot n_r \gtrless n$$

et à fortiori

$$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_r \gtrless n$$

quelque grand que soit r.

D'où l'on conclut qu'au delà d'un certain rang s tous les q sont égaux à l'unité. Et par conséquent tous les produits tels que $q_1 q_2 q_3 \ldots q_r$ sont des diviseurs du produit

$$\mathrm{M} = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_s \gtrless n.$$

81. 5° Comme on a

$$\alpha_r = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \frac{p_3}{q_1 q_2 q_2} + \cdots + \frac{p_r}{q_1 q_2 \cdots q_r},$$

on voit que le produit $\mathrm{M} \cdot \alpha_r$ est un nombre entier.

C. Q. F. D.

§ 3. *Développement du numéro 72.*

82. Pour déterminer l'ordre α_1 de Φ, nous rappellerons la construction de Puiseux, en la simplifiant un peu et en faisant en sorte de pouvoir considérer à la fois les ordres d'infinitude positifs, nuls, négatifs.

Soient $\pi_0\pi_1\pi_2 \dots \pi_n$ les ordres respectifs de $P_0P_1P_2 \dots P_n$ (coefficients du polynome F). C'est-à-dire que

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= x^{\pi_0}\left(B_0 + \frac{B_0^{(1)}}{x} + \frac{B_0^{(2)}}{x^2} + \cdots\right) \qquad B_0 \neq 0 \\ P_1 &= x^{\pi_1}\left(B_1 + \frac{B_1^{(1)}}{x} + \frac{B_1^{(2)}}{x^2} + \cdots\right) \qquad B_1 \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

etc., les π et les B sont tous $\overline{I(x, j)}$.

L'ordre (inconnu) de Φ étant α, parmi les $(n+1)$ termes de $F\Phi$,

$$P_0\Phi^n; \quad P_1\Phi^{n-1}; \quad P_2\Phi^{n-2}; \dots P_n$$

distinguons ceux dont l'ordre est le plus grand

$$P_a\Phi^{n-a}; \quad P_b\Phi^{n-b}; \quad \dots P_k\Phi^{n-k}$$
$$(a < b < \cdots < k).$$

En écrivant que les ordres de ces termes sont égaux entre eux et surpassent l'ordre de tout terme non distingué $P_r\Phi^{n-r}$, on a

$$\pi_a + (n-a)\alpha = \pi_b + (n-b)\alpha = \cdots$$
$$= \pi_k + (n-k)\alpha > \pi_r + (n-r)\alpha$$

ou, en supprimant partout $n\alpha$,

$$\pi_a - a\alpha = \pi_b - b\alpha = \cdots \quad \cdots = \pi_k - k\alpha > \pi_r - r\alpha. \qquad (2)$$

83. Pour trouver les valeurs de α satisfaisant à ces conditions, nous allons opérer graphiquement. Portons en abscisses les indices

$$0\ 1\ 2 \dots n$$

et en ordonnées les ordres correspondants

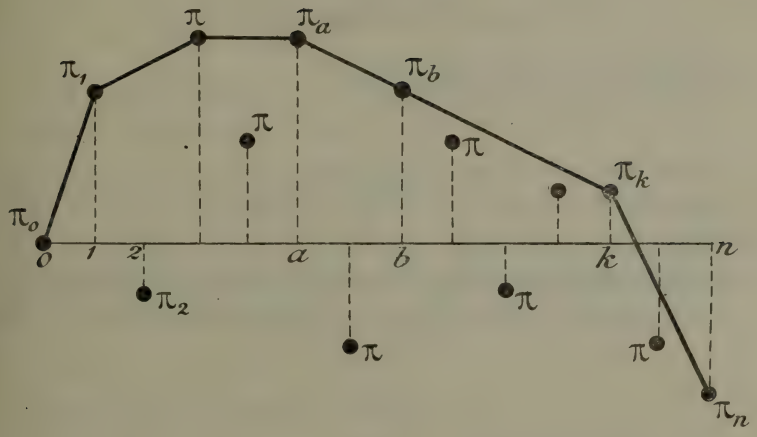
$$\pi_0\ \pi_1\ \pi_2 \dots \pi_n.$$

De la relation extraite de (2)

$$\pi_a - a\alpha = \pi_b - b\alpha$$

on déduit

$$\alpha = \frac{\pi_a - \pi_b}{a - b}. \qquad (3)$$



Et l'on voit que α est le coefficient angulaire de la droite qui joint les points π_a et π_b.

Comme on a, à cause de (2),

$$\alpha = \frac{\pi_a - \pi_b}{a - b} = \frac{\pi_b - \pi_c}{b - c} = \cdots,$$

les points

$$\pi_a \ \pi_b \ldots \pi_k$$

seront donc sur une même droite.

Pour que la valeur de α soit convenable, il faut, d'après (2), que pour aucun point π_s l'on n'ait

$$\pi_a - a \,.\, \alpha < \pi_s - s \,.\, \alpha.$$

Or $(\pi_a - a \,.\, \alpha)$ est l'ordonnée à l'origine d'une droite de coefficient angulaire α menée par le point π_a,

Et $(\pi_s - s \,.\, \alpha)$ est l'ordonnée à l'origine d'une droite de même coefficient angulaire α menée par le point π_s.

On voit donc que la valeur de α donnée par la formule (3) sera convenable si, en déplaçant parallèlement à elle-même vers le haut la droite passant primitivement par $\pi_a \pi_b \ldots \pi_k$, on ne rencontre aucun des points

$$\pi_0 \; \pi_1 \; \pi_2 \; \ldots \; \pi_n .$$

De là la construction suivante :

84. Recouvrons tous les points $\pi_0 \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_n$ par une ligne polygonale convexe vers le haut, partant de π_0 pour aboutir à π_n.

Les côtés de cette ligne convexe auront chacun pour coefficient angulaire l'ordre α d'une solution possible Φ de $F\Phi = \overline{00}$.

* * *

85. Choisissons donc un côté de ce polygone de Puiseux et supposons qu'il passe par les points $\pi_a \pi_b \ldots \pi_k$. On aura comme valeur de l'ordre de Φ

$$\alpha_1 = \frac{\pi_k - \pi_a}{k - a} = \frac{\pi_k - \pi_b}{k - b} = \ldots \qquad (4)$$

Et l'on voit que le nombre α_1 est rationnel.

86. Posons

$$\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1},$$

la fraction étant supposée réduite à sa plus simple expression, et q_1 étant supposé positif (p_1 de signe quelconque, ou nul, auquel cas on aurait $q_1 = 1$).

On voit par (4) que les nombres

$$(k-a),\quad (k-b),\ldots$$

sont tous multiples de q_1.

Cette remarque nous servira plus loin.

§ 4. *Développement du numéro 75.*

87. Ayant choisi α_1 conformément à ce qui précède, il s'agit de déterminer le premier coefficient A_1 de la série

$$A_1x^{\alpha_1}+A_2x^{\alpha_2}+\cdots$$

Ce choix de α_1 est fait de telle sorte que, si dans $F\Phi$ l'on considère Φ comme étant d'ordre α_1, c'est-à-dire si l'on pose

$$\Phi = x^{\alpha_1}t,$$

t étant d'ordre zéro, les termes en

$$t^{n-a},\quad t^{n-b},\ldots t^{n-k}$$

se distingueront des autres comme étant d'ordre plus élevé.

L'équation

$$F\Phi = \overline{00}$$

ou plutôt

$$F(x^{\alpha_1}t) = \overline{00},$$

après division par une puissance convenable de x, pourra donc se mettre sous la forme

$$\{B_at^{n-a}+B_bt^{n-b}+\cdots+B_kt^{n-k}\}$$
$$+\frac{1}{x_1}[Q_0t^n+Q_1t^{n-1}+\cdots+Q_n]=\overline{00}. \qquad (5)$$

Dans cette équation (5), les B sont des nombres $I(x, j)$

différents de zéro (voyez formules (1) du n° 82), x_1 est mis pour

$$x_1 = x^{\frac{1}{q_1}}.$$

Enfin les coefficients $Q_0 Q_1 Q_2 \dots Q_n$ sont des fonctions d'ordre $\leqslant 0$ de la forme

$$Q = I + \frac{I}{x_1} + \frac{I}{x_1^2} + \frac{I}{x_1^3} + \dots + \frac{I}{x_1^j} + \overline{00}$$

où I est une abréviation de

$$I = \overline{1(x, j)}.$$

Pour abréger, nous représenterons dans (5) par $G_1(t)$ le polynome entre { } et par $H_1(t)$ le polynome entre [ ]. De sorte que l'équation (5) s'écrira

$$G_1(t) + \frac{1}{x_1} H_1(t) = \overline{00}. \qquad (6)$$

88. Des relations

$$\Phi = x^{\alpha_1} t = A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + \dots$$

on déduit que la fonction inconnue t doit avoir la forme

$$t = A_1 + \Phi_2$$

avec

$$\Phi_2 = \overline{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Ainsi que nous l'avons annoncé au numéro 73, nous devons déterminer $A_1 \neq 0$ de façon que dans $F\Phi$ et, par conséquent, dans $F(x^{\alpha_1} t)$ ou dans

$$G_1(t) + \frac{1}{x_1} H_1(t)$$

les termes d'ordre le plus élevé se détruisent entre eux. Cette condition se traduit par

$$G_1(A_1) = 0. \tag{7}$$

Mais $G_1(A)$ est le polygone entre $\{\ \}$ de l'équation (5) où l'on remplace t par A. Et l'on voit que ce polynome est divisible par A^{k-a}. C'est-à-dire que

$$G_1(A) = A^{k-a} \cdot f_1(A) \tag{8}$$

avec

$$f_1(A) = B_a A^{k-a} + B_b A^{k-b} + \cdots + B_k \tag{9}$$

où les B sont $I(x, j)$ et $\neq 0$.

Comme A_1 doit être $\neq 0$ et doit annuler le produit (8), A_1 sera racine de

$$f_1(A) = 0. \tag{10}$$

§ 5. *Développement relatif au numéro 77.*

89. Nous avons montré au numéro 86 que les nombres $(k - a)$, $(k - b)$, ... sont tous divisibles par q_1. Donc le polynome $f_1(A)$ défini par la relation (9) du paragraphe ci-dessus est bien un polynome en A^{q_1}, comme nous l'avons annoncé au numéro 77.

§ 6. *Développement relatif au numéro 78.*

Construction du polynome f_2.

90. Rappelons comment, d'après le numéro 75, on doit former ce polynome $f_2(A)$:

α). Ayant choisi convenablement le premier terme $A_1 x^{\frac{p_1}{q_1}}$ de Φ, on posera

$$x = x_1^{q_1}$$
$$\Phi = x_1^{p_1}(A_1 + \Phi_2)$$

et en faisant ces substitutions dans

$$F\Phi = \overline{00}$$

on obtiendra une équation en Φ_2

$$F_2\Phi_2 = \overline{00}$$

dont il faudra chercher les solutions Φ_2 d'ordre < 0.

β). On trouvera la valeur de l'ordre (*négatif*) $\frac{p_2}{q_2}$ de Φ_2 comme étant égale au coefficient angulaire d'un côté du polygone de Puiseux, polygone relatif à l'équation

$$F_2\Phi_2 = \overline{00}.$$

γ). Connaissant le nombre $\frac{p_2}{q_2}$, on formera le polynome $G_2(A)$ en distinguant les termes de l'ordre le plus élevé dans

$$F_2\{x^{\frac{p_2}{q_2}}(A + \overline{\varepsilon})\}.$$

δ). On obtiendra enfin le polynome $f_2(A)$ en divisant le polynome $G_2(A)$ par la plus haute puissance possible de A,

$$G_2(A) = A^m \cdot f_2(A).$$

Propriété du polynome f_2.

Énoncé.

91. Le polynome $f_2(A)$ étant ainsi défini, il s'agit de prouver que si la valeur qui a été choisie pour A_1 parmi les racines de $f_1(A)$ (conformément au n° 73) est une racine de multiplicité n_1 de $f_1(A)$, il s'agit de prouver qu'alors le degré m_2 de $f_2(A)$ sera $\leqslant n_1$.

Démonstration.

92. Pour mettre cette propriété en évidence, nous allons reprendre les opérations (α) (β) (γ) (δ) du numéro 90, opération que nous devons effectuer successivement pour obtenir $f_2(\mathrm{A})$.

Opération (α).

93. Pour obtenir l'équation

$$\mathrm{F}_2\Phi_2 = \overline{00},$$

nous devons remplacer Φ par

$$\Phi = x_1^{p_1}(\mathrm{A}_1 + \Phi_2) = x^{\alpha_1}(\mathrm{A}_1 + \Phi_2)$$

dans

$$\mathrm{F}\Phi = \overline{00}.$$

Mais nous avons vu au numéro 87 que cette équation est équivalente à

$$\mathrm{G}_1(t) + \frac{1}{x_1}\mathrm{H}_1(t) = \overline{00},$$

la fonction t étant définie par

$$\Phi = x^{\alpha_1}t.$$

Donc, au lieu de remplacer Φ par

$$\Phi = x^{\alpha_1}(\mathrm{A}_1 + \Phi_2)$$

dans

$$\mathrm{F}\Phi = \overline{00},$$

il est équivalent de remplacer t par

$$t = \mathrm{A}_1 + \Phi_2$$

dans

$$G_1(t) + \frac{1}{x_1} H_1(t) = \overline{00}.$$

94. On obtient ainsi l'équation

$$G_1(A_1 + \Phi_2) + \frac{1}{x_1} H_1(A_1 + \Phi_2) = \overline{00}$$

représentée en abrégé par

$$F_2\Phi_2 = \overline{00}$$

et qui, ordonnée par rapport à Φ_2, s'écrit

$$R_0\Phi_2^n + R_1\Phi_2^{n-1} + \cdots + R_n = \overline{00} \qquad (11)$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
R_n &= G_1(A_1) + \frac{1}{x_1} H_1(A_1) \\
1 \,.\, R_{n-1} &= G_1'(A_1) + \frac{1}{x_1} H_1'(A_1) \\
1 \,.\, 2 \,.\, R_{n-2} &= G_1''(A_1) + \frac{1}{x_1} H_1''(A_1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\underline{|n_1}\, R_{n-n_1} &= G_1^{(n_1)}(A_1) + \frac{1}{x_1} H^{(n_1)}(A_1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\underline{|n}\, R_0 &= G_1^{(n)}(A_1) + \frac{1}{x_1} H_1^{(n)}(A_1)
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

où les accents représentent des dérivés par rapport à A et où $\underline{|n}$ représente, selon la notation anglaise, la factorielle $1, 2, 3 \ldots n$.

95. Nous avons dit que A_1 est racine de multiplicité n_1 de

$$f_1(A) = 0.$$

Mais comme on a, formule (8)

$$G_1(A) = A^{k-a} f_1(A)$$

et que de plus

$$A_1 \neq 0,$$

alors A_1 sera racine de multiplicité n_1 de

$$G_1(A) = 0.$$

On aura donc dans les formules (12)

$$\left.\begin{aligned} &G_1(A_1) = G_1'(A_1) = G_1''(A_1) = \cdots = G_1^{(n_1-1)}(A_1) = 0 \\ \text{et} \quad &\\ &G_1^{(n_1)}(A_1) \neq 0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Opération (β).

96. Pour construire le polygone de Puiseux relatif à l'équation (11), nous devons, comme nous l'avons fait au numéro 83, porter en abscisses les indices

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots\ldots \quad n$$

et en ordonnées les ordres

$$\rho_0 \quad \rho_1 \quad \rho_2 \quad \ldots\ldots \quad \rho_n$$

des coefficients

$$R_0 \quad R_1 \quad R_2 \quad \ldots\ldots \quad R_n$$

de l'équation (11).

Or, les formules (12) et (13) montrent que ces ordres ont les propriétés suivantes :

1° Tous ces ordres sont ≤ 0;

2° L'ordre de $R_{n-n_1} = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{x=\infty} R_{n-n_1}$ est une quantité finie $+ 0$.

Cette quantité est en effet $G_1^{(n_1)}(A_1) + 0$, d'après (13);

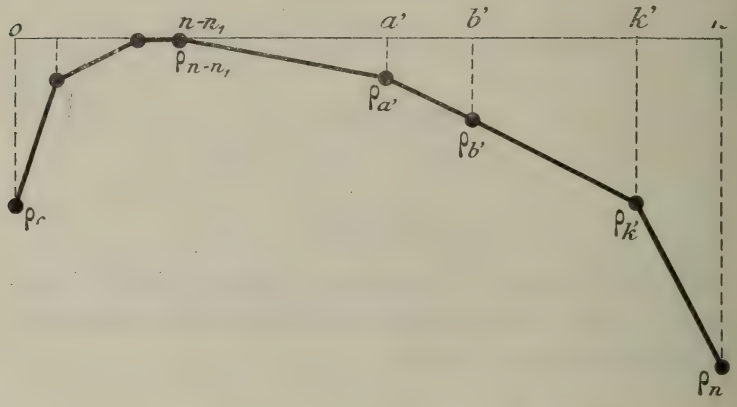
3° Les ordres relatifs aux indices $> n - n_1$ sont tous < 0.

97. Le polygone de Puiseux relatif à l'équation (11) satisfait donc aux conditions suivantes :

1° Il n'a aucun sommet au-dessus de l'axe des abscisses;

2° Le sommet ρ_{n-n_1} est sur cet axe;

3° Tous les sommets à droite de ρ_{n-n_1} sont en dessous de cet axe des abscisses.



Les côtés à coefficients angulaires négatifs sont donc tous ceux situés à droite de ρ_{n-n_1}, et ceux-là seulement.

Choisissons l'un de ces côtés situés à droite de ρ_{n-n_1}. Nous assignons ainsi à l'ordre de Φ_2 une valeur $\frac{p_2}{q_2}$ (négative) égale au coefficient angulaire de ce côté.

L'opération (3) est maintenant terminée, mais avant de passer à l'opération suivante, faisons une remarque qui sera pour nous capitale.

98. Supposons que le côté choisi passe par les points

$$\rho_{a'} \quad \rho_{b'} \quad \cdots\cdots \quad \rho_{k'}.$$

Puisque tous ces points sont à droite de ρ_{n-n_1}, donc compris entre ρ_{n-n_1} et ρ_n (inclusivement), la différence des abscisses des points $\rho_{k'}$ et $\rho_{a'}$ sera $\leq$ la différence des abscisses des points ρ_n et ρ_{n-n_1}.

Donc on a

$$k' - a' \geqslant n - (n - n_1)$$

ou

$$k' - a' \geqslant n_1 \qquad (14)$$

Opération (γ).

99. Le côté du polygone de Puiseux et l'ordre $\frac{p_2}{q_2}$ de Φ_2 étant ainsi choisis, si dans $F_2(\Phi_2)$ on pose

$$\Phi_2 = x^{\frac{p_2}{q_2}}(A + \bar{\varepsilon}),$$

les termes qui se distingueront par l'élévation de leur ordre (*) sont les termes aux indices

$$a' \quad b' \quad \cdots\cdots \quad k'$$

correspondants aux points

$$\rho_{a'} \quad \rho_{b'} \quad \cdots\cdots \quad \rho_{k'}$$

situés sur le côté choisi du polygone de Puiseux.

On aura donc

$$G_2(A) = B'_{a'} \; A^{n-a'} + B'_{b'} \; A^{n-b'} + \cdots + B'_{k'} \; A^{n-k'}. \qquad (15)$$

(*) A étant $\overline{I(x_j)}$ et $\neq 0$, son ordre est nul.

Opération (δ).

100. D'après (15) on aura

$$G_2(A) = A^{n-k'} \cdot f_2(A)$$

avec

$$f_2(A) = B'_{a'} \quad A^{k'-a'} + B'_{b'} \quad A^{k'-b'} + \cdots + B'_{k'},$$

et l'on voit que degré de $f_2(A)$ en A est

$$m_2 = k' - a'$$

et que d'après (14) on a $m_2 \leqslant n_1$. C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

Problème fonctionnel.

Théorème.

101. Le polynome $F\Phi$ étant celui défini au numéro 71, chacune des fonctions Φ construites dans le chapitre précédent pour satisfaire à

$$F\Phi = \overline{00}$$

est égale asymptotiquement à l'une des n racines φ de l'équation

$$F\varphi = 0.$$

Réciproque.

102. Chacune des racines φ de l'équation

$$F\varphi = 0$$

est égale asymptotiquement à l'une des fonctions Φ construites dans le chapitre précédent pour satisfaire à

$$F\Phi = \overline{00}.$$

* * *

103. Ces deux théorèmes ne devant pas être utilisés ici, nous reportons leur démonstration dans une note annexée à la fin de ce travail.

* * *

104. Nous avons signalé au numéro 70[4] (p. 45) que la

classe $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ forme un groupe pour les opérations algébriques rationnelles (addition, soustraction, multiplication, division). Représentons par $\overline{\mathrm{R}}$ l'ensemble des nombres rationnels. On pourra conclure de ces deux chapitres que la classe

$$\overline{\mathfrak{P}}(x^{\overline{\mathrm{R}}})$$

forme un groupe pour toutes les opérations algébriques, rationnelles ou irrationnelles.

TROISIÈME PARTIE

Équations différentielles à paramètre variable. Problème formel.

CHAPITRE PREMIER

Énoncé du problème.

105. Représentons par $\overline{a}$ la classe des fonctions de z, indépendantes de x et de j, $\left(\overline{1(xj)}\right)$, bornées ainsi que leurs dérivées 1°, 2°, ..., quand z parcourt l'intervalle réel $z_1 z_2$.

106. Et représentons par $\overline{\mathfrak{T}(x)}$ la classe des fonctions de xzj, asymptotiquement égales à la somme des j premiers termes d'une série génératrice de la forme

$$x^{\bar{n}}\left(\overline{a} + \overline{a}\cdot\frac{1}{x} + \overline{a}\cdot\frac{1}{x^2} + \cdots\right)(*).$$

107. Le problème qui va nous occuper dans cette troisième partie est le suivant :

Étant donné l'opérateur différentiel, contenant un paramètre variable x,

$$\mathrm{FD} = \mathrm{P}_0\mathrm{D}^n + \mathrm{P}_1\mathrm{D}^{n-1} + \mathrm{P}_2\mathrm{D}^{n-2} + \cdots + \mathrm{P}_n \qquad (1)$$

(*) C'est la même classe $\overline{\mathfrak{T}_x}$ qu'au n° 70.

où

$$D = \frac{\partial}{\partial z}$$

et où les coefficients P sont des fonctions de xzj de la forme

$$P = \overline{\mathcal{P}}(x),$$

il s'agira de satisfaire à la relation

$$\frac{(FD)Y}{Y} = \overline{00} \tag{2}$$

par une fonction $Y(xzj)$ de la forme

$$Y = T \cdot u \tag{3}$$

où T est le *facteur principal*,

$$T = e^{\bar{a}x^{\alpha_1} + \bar{a}x^{\alpha_2} + \cdots \bar{a}x^{\alpha j}} \tag{4}$$

(les α étant des constantes *positives*, décroissantes) et où u est le *facteur secondaire*,

$$u = \bar{a}x^{\beta_1} + \bar{a}x^{\beta_2} + \cdots + \bar{a}x^{\beta j} \tag{5}$$

(les β étant des constantes réelles, décroissantes). Cette fonction Y sera appelée solution *formelle* de (FD).

* * *

108. Comme on peut multiplier la fonction Y par une fonction indépendante de z, très largement arbitraire, sans cesser de satisfaire à l'équation (2), le facteur principal T se trouve entaché d'indétermination.

C'est pourquoi, au lieu de calculer directement T, nous calculerons l'expression

$$\varphi = \frac{DT}{T} \tag{6}$$

que nous appellerons la *radicale* (*) de Y.

Cette radicale φ sera d'après (4) et (6) de la forme

$$\varphi = \bar{a}x^{\alpha_1} + \bar{a}x^{\alpha_2} + \cdots + \bar{a}x^{\alpha_i} \tag{7}$$

où les α sont des constantes *positives* décroissantes.

* * *

109. Enfin nous restreindrons l'indétermination du facteur principal T en supposant

$$T = c^{\int_{z_0}^{z} \varphi dz}, \tag{8}$$

z_0 étant un point qu'on choisira dans l'intervalle $z_1 z_2$.

* * *

110. Voici dans quel ordre nous traiterons notre problème :

Dans le chapitre II, nous nous occuperons de la recherche des radicales que peuvent avoir les solutions Y qui ont la forme mentionnée ci-dessus.

Le chapitre III sera consacré à l'étude du facteur secondaire u.

Enfin dans le chapitre IV on démontrera qu'on peut toujours former un système de n solutions formelles linéairement indépendantes.

(*) Nous verrons que l'opération FD possède *n radicales*, égales ou inégales, dont le calcul est parallèle au calcul formel des *n racines* du polynome FΦ.

CHAPITRE II.

Calcul des radicales.

§ 1. *Abrégé de la théorie.*

1° Recherche du premier terme.

111. Nous verrons que le premier terme $A_1 x^{\alpha_1}$ de la capitale

$$\varphi = A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + \cdots$$

est le même que le premier terme de la fonction Φ des numéros 70 et suivants, astreinte à satisfaire à l'équation algébrique

$$F\Phi = \overline{00}.$$

(Voir n^os 121 à 125.)

112. La méthode précédemment exposée donnera donc à choisir la valeur de α_1 parmi les coefficients angulaires des côtés d'un polygone de Puiseux. Ce sera un nombre rationnel

$$\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1}.$$

113. Puis la dite méthode donnera à choisir A_1 parmi les racines d'une équation algébrique à coefficients indépendants de x, j

$$f_1(A) = 0 \ (*).$$

(*) Dans une note à la fin de ce travail, nous montrerons que si A_1 est racine simple de $f_1(A)$, la radicale tout entière sera égale à toute la partie principale de Φ.

2° Recherche des termes suivants.

114. Ayant choisi le premier terme $A_1 x^{\alpha_1}$ de φ, on posera

$$x = x_1^{q_1}$$
$$Y = c^{\int A_1 x^{\alpha_1} dz} \cdot Y_2,$$

et cette substitution faite dans l'équation (2) donnera une nouvelle équation

$$\frac{(\mathcal{F}_2 D) Y_2}{Y_2} = \overline{00} \qquad (9)$$

à coefficients de la forme $\overline{\mathcal{F}}(x_1)$, équation dont il faudra considérer les solutions ayant des capitales de la forme

$$\varphi_2 = A_2 x^{\alpha_2} + A_3 x^{\alpha_3} + \cdots,$$

c'est-à-dire des capitales dont l'ordre α_2 soit $< \alpha_1$.

115. Le deuxième terme $A_2 x^{\alpha_2}$ de φ sera le premier terme de φ_2. Il se déterminera en recommençant sur l'équation (9) les mêmes opérations que nous venons d'indiquer sur l'équation (2).

On calculera donc, par la construction de Puiseux appliquée à $\mathcal{F}_2$, l'ordre $\alpha_2 = \frac{p_2}{q_2}$; puis on aura à choisir A_2 parmi les *racines* d'une équation algébrique à coefficient $I(x_1 j)$

$$f_2(A) = 0.$$

116. Et ainsi de suite... On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à un exposant

$$\alpha_{p+1} \lesseqgtr 0,$$

auquel cas l'on aura

$$\varphi = A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + \cdots + A_p x^{\alpha_p},$$

p étant indépendant de j.

Limitation du nombre de termes

117. Que l'on finira toujours par atteindre un exposant

$$\alpha_{p+1} \gtrless 0$$

après un nombre limité d'opérations, cela résulte de la propriété suivante relative aux exposants $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$

Les exposants $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ sont des nombres rationnels pouvant être tous réduits à un même dénominateur $M \leqslant n$.

De sorte qu'en posant

$$x^{\frac{1}{M}} = X$$

$$\alpha_1 = \frac{m}{M},$$

on aura

$$\varphi = X^m (\bar{a} + \bar{a}_1 X + \bar{a}_2 X^2 + \cdots + \bar{a}_{} X^{m-1}),$$

développement nécessairement arrêté, en vertu de cette stipulation que nous avons faite dans la formule (7) que les exposants doivent être *positifs*.

Le nombre des termes de la radicale φ sera donc $\leqslant m$. Mais il faut démontrer la propriété soulignée.

Démonstration.

118. Nous savons déjà que les α sont rationnels. Pour démontrer l'existence du commun dénominateur M, il suffit de

répéter le raisonnement des numéros 77 à 80 et de remplacer le numéro 81 par cette phrase :

« Comme on a

$$\alpha_r = \frac{p_r}{q_1 q_2 \cdots q_r},$$

on voit que le produit M . α_r est un nombre entier. »

C. Q. F. D.

* * *

Ce raisonnement fait aux numéros 77 à 80 est subordonné à la démonstration de deux points :

PREMIER POINT.

119. $f_1(A)$ est un polynome en A^{q_1}.

La démonstration qui est faite pour le problème algébrique n'est pas à refaire pour le problème différentiel, puisque le polynome $f_1(A)$ est le même.

SECOND POINT.

120. Il faut prouver que si la valeur qui a été choisie pour A_1 parmi les racines de $f_1(A)$ est une racine de multiplicité n_1 de $f_1(A)$, il faut prouver qu'alors le degré m_2 de $f_2(A)$ sera $\leqslant n_1$.

La démonstration faite pour le problème algébrique doit être modifiée convenablement pour être transportée dans le problème différentiel qui nous occupe.

(Voir nos 126 à 144.)

§ 2. *Développement du numéro 111.*

121. Nous avons à rechercher une solution de

$$\frac{(FD)Y}{Y} = \overline{00}$$

qui soit de la forme

$$Y = T \cdot u$$

avec

$$T = c^{\int_{z_0}^{z} \varphi dz}$$

$$\varphi = A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + \cdots + A_j x^{\alpha_j}$$
$$u = \bar{a} x^{\beta_1} + \bar{a} x^{\beta_2} + \cdots + \bar{a} x^{\beta_j}.$$

Les A doivent être de la classe $\bar{a}$ définie au numéro 105; les α doivent être des constantes *positives* décroissantes; les β doivent être des constantes réelles décroissantes.

122. Nous restreindrons éventuellement l'étendue de l'intervalle $z_1 z_2$ qui sert de domaine $\overline{(\omega)}$ à la variable z — ou plutôt nous partagerons cet intervalle en intervalles partiels — de façon que les valeurs trouvées pour les coefficients $A_1 A_2 \ldots$ ne s'annulent pas dans $\overline{\Omega}$.

123. Nous ferons également en sorte que le premier coefficient de u (coefficient de (x^{β_1}) ne s'annule pas dans $\overline{\Omega}$.

124. Cela posé, si dans

$$\frac{(FD)Y}{Y} = P \frac{D^n Y}{Y} + P_1 \frac{D^{n-1} Y}{Y} + \cdots + P_n \qquad (6)$$

on remplace Y par une expression T . u de la forme ci-dessus mentionnée, on voit que chacun des termes

$$P_0 \frac{D^n Y}{Y}, \quad P_1 \frac{D^{n-1} Y}{Y}, \ \dots P_n \tag{7}$$

prend la forme

$$\overline{a}x^{\gamma_1} + \overline{a}x^{\gamma_2} + \dots + \overline{a}x^{\gamma_j} + \overline{00}$$

où les γ sont réels et décroissants.

Puisque nous avons à satisfaire à la relation

$$\frac{(FD)Y}{Y} = \overline{00},$$

les deux premières conditions qu'ont à remplir les indéterminées qui sont dans φ et dans u sont que, dans le second membre de (6) :

1° Les termes dont l'ordre est le plus grand soient à plusieurs qui puissent se détruire entre eux;

2° Que ces mêmes termes se détruisent effectivement (au moins pour j suffisamment grand).

Dans chacune des expressions (7), telle que $Pr \frac{D^{n-r} Y}{Y}$, le terme de l'ordre le plus élevé est égal au produit du premier terme de P_r par le premier terme de $\frac{D^{n-r} Y}{Y}$.

On voit donc que pour vérifier les deux conditions énoncées, on n'a à connaître que le premier terme de chacune des expressions

$$\frac{DY}{Y}, \quad \frac{D^2 Y}{Y}, \ \dots \frac{D^n Y}{Y}. \tag{8}$$

Or, nous allons démontrer que chacun de ces premiers termes de (8) est respectivement le même que dans

$$\varphi, \ \varphi^2, \ \dots \ \varphi^n, \tag{9}$$

c'est-à-dire qu'il est respectivement égal à

$$(A_1 x^{\alpha_1})^1,\ (A_1 x^{\alpha_1})^2,\ \dots\ (A_1 x^{\alpha_1})^n.$$

Il en résultera que $A_1 x^{\alpha_1}$ se déterminera exactement comme le premier terme de la fonction Φ astreinte à satisfaire à l'équation algébrique

$$P_0 \Phi^n + P_1 \Phi^{n-1} + \dots + P_n = \overline{00}$$

représentée en abrégé par

$$F\Phi = \overline{00}.$$

Le premier terme de φ sera par conséquent égal au premier terme de Φ.

* * *

125. Pour montrer facilement que le premier terme de $\dfrac{D^m Y}{Y}$ est égal au premier terme de φ^m, nous désignerons par $\overline{b}$ la classe des fonctions de la forme

$$\overline{b} = \overline{a} + \overline{a} x^{\gamma_1} + \overline{a} x^{\gamma_2} + \dots + \overline{a} x^{\gamma_\mu} + \overline{00}, \qquad (10)$$

les γ étant des constantes négatives décroissantes (*).

Remarquons que, par suite de la condition du numéro 123, on aura

$$\frac{Du}{u} = \overline{b}.$$

Donc de

$$Y = T \cdot u$$

(*) Une fonction étant de la classe $\overline{b}$, ses dérivées successives par rapport à x sont aussi de la classe $\overline{b}$.

on déduira

$$\frac{DY}{Y} = \frac{DT}{T} + \frac{Du}{u} = \varphi + \bar{b}. \qquad (11)$$

De plus, par suite de la condition du numéro 122, on aura

$$\frac{D\varphi}{\varphi} = \bar{b}.$$

Donc

$$D\varphi = \bar{b} \cdot \varphi;\ D^2\varphi = \bar{b}\varphi;\ \ldots\ D^m\varphi = \bar{b}\varphi.$$

De ces relations et de la relation (11)

$$DY = (\varphi + \bar{b})Y$$

on déduit

$$D^2Y = (\varphi^2 + \bar{b}\varphi + \bar{b})Y,$$

puis

$$D^3Y = (\varphi^3 + \bar{b}\varphi^2 + \bar{b}\varphi + \varphi)Y$$

. . . . . .

$$D^mY = (\varphi^m + \bar{b}\varphi^{m-1} + \cdots + \bar{b}\varphi + \bar{b})Y.$$

Comme φ est un infiniment grand (pour $x = +\infty$), on voit que le terme principal de $\frac{D^mY}{Y}$ est égal au terme principal de φ^m.

C. Q. F. D.

§ 3. *Développement du numéro 120.*

Construction du polynome f_2(*).

126. Rappelons comment, d'après le numéro 115, on doit former ce polynome $f_2(A)$:

(*) Nous prions le lecteur de lire deux fois les nos 126 à 132, la première fois en passant les remarques α' β' γ'.

α) Ayant choisi convenablement le premier terme $A_1 x^{\alpha_1}$ de la radicale φ, on posera

$$Y = c^{\int_{z_0}^{z} A_1 x^{\alpha_1} dz} Y_2, \tag{1}$$

et, en faisant cette substitution dans

$$\frac{(FD)Y}{Y} = \overline{00}, \tag{2}$$

on obtiendra une équation en Y_2

$$\frac{(\mathcal{F}_2 D)Y_2}{Y_2} = \overline{00} \tag{3}$$

dont il faudra chercher les capitales φ_2 d'ordre $< \alpha_1$.

Le premier terme $A_2 x^{\alpha_2}$ d'une capitale φ_2 sera le premier terme d'une solution Ψ_2 de l'équation algébrique

$$\mathcal{F}_2(\Psi_2) = \overline{00}, \tag{4}$$

équation dont il ne faudra considérer que les solutions d'ordre $< \alpha_1$.

127. α') Remarque :
En posant

$$\Psi_2 = x^{\alpha_1} \Phi_2, \tag{5}$$

on voit que le premier terme $A_2 x^{\alpha_2}$ de φ_2, qui est égal au premier terme de Ψ_2, sera égal au produit par x^{α_1} du premier terme de Φ_2. Nous poserons

$$\mathcal{F}_2 \Psi_2 = F_2 \Phi_2, \tag{6}$$

et nous représenterons par (α') l'opération fournissant le polynome $F_2 \Phi_2$. Ce polynome s'obtient en remplaçant D par $x^{\alpha_1} \Phi_2$ dans $\mathcal{F}_2 D$.

* * *

128. β) On trouvera la valeur de l'ordre $\alpha_2 < \alpha_1$ de φ_2 comme étant égale au coefficient angulaire d'un côté du polynome de Puiseux, polynome relatif à l'équation

$$\mathcal{F}_2\Psi_2 = \overline{00}.$$

129. β′) Remarque :

Comme corollaire du numéro 127, on pourra trouver l'ordre $\alpha_2 < \alpha_1$ de φ_2 en augmentant de α_1 le coefficient angulaire négatif β_2 d'un côté du polygone de Puiseux, polygone relatif à l'équation

$$F_2\Phi_2 = \overline{00}. \qquad (7)$$

La recherche du coefficient angulaire β_2 dans ce nouveau polygone de Puiseux sera l'opération (β′).

* * *

130. γ) Connaissant le nombre α_2, on formera le polynome $G_2(A)$ en distinguant les termes de l'ordre le plus élevé dans

$$\mathcal{F}_2\{x^{\alpha_2}(A + \bar{\varepsilon})\}.$$

131. γ′) Remarque :

De (5) et (6) on déduit que, quel que soit Φ_2, l'on a

$$\mathcal{F}_2\{x^{\alpha_1}\Phi_2\} = F_2\Phi_2.$$

En remplaçant dans cette relation Φ_2 par

$$\frac{x^{\alpha_2}(A + \bar{\varepsilon})}{x^{\alpha_1}} = x^{\beta_2}(A + \bar{\varepsilon}),$$

on a

$$\mathcal{F}_2\left\{x^{\gamma_1}\left[\frac{x^{\alpha_2}(A + \bar{\varepsilon})}{x^{\alpha_1}}\right]\right\} = F_2\{x^{\beta_2}(A + \bar{\varepsilon})\}$$

ou

$$\mathcal{F}_2\{x^{\alpha_2}(\mathrm{A}+\bar{\varepsilon})\} = \mathrm{F}_2\{x^{\beta_2}(\mathrm{A}+\bar{\varepsilon})\}.$$

Ces deux polynomes étant égaux quel que soit x, on obtiendra le même polynome $\mathrm{G}_2(\mathrm{A})$ en distinguant les termes de l'ordre le plus élevé soit dans

$$\mathcal{F}_2\{x^{\alpha_2}(\mathrm{A}+\bar{\varepsilon})\},$$

comme nous l'avons fait en (γ),
soit dans

$$\mathrm{F}_2\{x^{\beta_2}(\mathrm{A}+\bar{\varepsilon})\}.$$

Cette dernière façon d'opérer sera appelée l'opération (γ').

* * *

132. δ) On obtiendra enfin le polynome $f_2(\mathrm{A})$ en divisant le polynome $\mathrm{G}_2(\mathrm{A})$ par la plus haute puissance possible de A

$$\mathrm{G}_2(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^m f_2(\mathrm{A}).$$

PROPRIÉTÉ DU POLYNOME f_2.

Énoncé.

133. Le polynome $f_2(\mathrm{A})$ étant ainsi défini, il s'agit de prouver que si la valeur qui a été choisie pour A_1 parmi les racines de $f_1(\mathrm{A})$ est une racine de multiplicité n_1, il s'agit de prouver qu'alors le degré m_2 de $f_2(\mathrm{A})$ sera $\geqslant n_1$.

Démonstration.

134. Pour mettre cette propriété en évidence, nous allons reprendre les opérations (α) (α'), ainsi que les opérations (β') (γ') (δ) des numéros 126, etc., opérations qu'il suffit d'effectuer successivement pour obtenir $f_2(\mathrm{A})$.

Opération (α).

135. Pour obtenir l'équation

$$\frac{(\mathcal{F}_2 D)\,Y_2}{Y_2} = \overline{00}, \qquad (3) = (8)$$

nous devons remplacer Y par

$$Y = \mathcal{A}_1 \,.\, Y_2 \qquad (9)$$

avec

$$\mathcal{A}_1 = c^{\int_{z_0}^{z} A_1 x^{\alpha_1} dz} \qquad (10)$$

dans

$$\frac{(FD)Y}{Y} = \overline{00}. \qquad (2) = (11)$$

136. Mais nous savons, d'après le numéro 87, que l'opérateur (FD) est égal à

$$FD = K \,.\, \{ (G_1\delta) + \frac{1}{x_1} (H_1\delta) \} \qquad (12)$$

avec

$$K = \text{une certaine puissance de } x \qquad (13)$$

$$\delta = \text{opérateur } \frac{1}{x^{\alpha_1}} D \qquad (14)$$

$$x_1 = x^{\frac{1}{q_1}} \quad (q_1 \text{ étant le dénominateur de } \alpha_1). \qquad (15)$$

Donc, au lieu de faire la substitution (9) dans (11), on pourra faire cette substitution dans

$$\{ (G_1\delta) + \frac{1}{x_1} (H_1\delta) \} \, Y = \overline{00} \,.\, Y. \qquad (16)$$

137. Dans cette relation, les opérateurs

$$\delta \quad \delta^2 \quad \delta^3 \quad \ldots\ldots \quad \delta^n$$

devront donc être appliqués au produit

$$Y = \mathcal{A}_1 \,.\, Y_2.$$

Représentons par δ_1 l'opération δ s'appliquant seulement au premier facteur, c'est-à-dire

$$\delta_1(\mathcal{A}_1 \,.\, Y_2) = (\delta\mathcal{A}_1) \,.\, Y_2,$$

et représentons par δ_2 l'opération δ appliquée seulement au deuxième facteur, c'est-à-dire

$$\delta_2(\mathcal{A}_1 \,.\, Y_2) = \mathcal{A}_1 \,.\, (\delta Y_2).$$

On aura donc

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

et

$$\delta^m = (\delta_1 + \delta_2)^m,$$

le deuxième membre devant être développé comme le binôme de Newton (*).

138. Cela posé, l'équation (16), avec la substitution (9), devient

$$\{ G_1(\delta_1 + \delta_2) + \frac{1}{x_1} H_1(\delta_1 + \delta_2) \} \mathcal{A}_1 \,.\, Y_2 = \overline{00}\, \mathcal{A}_1 \,.\, Y_2.$$

Cette équation, ordonnée par rapport à δ_2, s'écrira (**)

$$\{ \mathcal{A}_1 R_0 \delta_2^n + \mathcal{A}_1 R_1 \delta_2^{n-1} + \mathcal{A}_1 R_2 \delta_2^{n-2} + \cdots + \mathcal{A}_1 R_n \} \, Y_2 = \overline{00}\, \mathcal{A}_1 Y_2.$$

ou bien

$$\{ R_0 \delta_2^n + R_1 \delta_2^{n-1} + R_2 \delta_2^{n-2} + \cdots + R_n \} \, Y_2 = \overline{00} \,.\, Y_2, \qquad (17)$$

(*) Nous retrouvons, démontrée de façon fort simple, la formule de Leibnitz sur la dérivée d'un produit.

(**) Les expressions de $R_0 R_1 \ldots R_n$ sont données au numéro 139 qui suit.

telle est, en y remplaçant δ_2 par $\frac{1}{x^{\alpha_1}}\mathrm{D}$, l'équation (8)

$$(\mathcal{F}_2\mathrm{D})\,\mathrm{Y}_2 = \overline{00}\,\mathrm{Y}_2.$$

139. Dans cette équation (17), on a

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{A}_1\mathrm{R}_n &= (\mathrm{G}_1\delta_1)\mathcal{A}_1 + \frac{1}{x_1}(\mathrm{H}_1\delta_1)\mathcal{A}_1\\
1\,.\,\mathcal{A}_1\mathrm{R}_{n-1} &= (\mathrm{G}_1'\delta_1)\mathcal{A}_1 + \frac{1}{x_1}(\mathrm{H}_1'\delta_1)\mathcal{A}_1\\
1\,.\,2\,.\,\mathcal{A}_1\mathrm{R}_{n-2} &= (\mathrm{G}_1''\delta_1)\mathcal{A}_1 + \frac{1}{x_1}(\mathrm{H}_1''\delta_1)\mathcal{A}_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\underline{|n_1}\,\mathcal{A}_1\mathrm{R}_{n-n_1} &= (\mathrm{G}_1^{(n_1)}\delta_1)\mathcal{A}_1 + \frac{1}{x_1}(\mathrm{H}_1^{(n_1)}\delta_1)\mathcal{A}_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\underline{|n}\,\mathcal{A}_1\mathrm{R}_0 &= (\mathrm{G}_1^{(n)}\delta_1)\mathcal{A}_1 + \frac{1}{x_1}(\mathrm{H}_1^{(n)}\delta_1)\mathcal{A}_1
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

où l'on peut écrire δ à la place de δ_1 et où les accents représentent des opérateurs dérivés par rapport à δ. C'est-à-dire que si, par exemple, l'opérateur $\mathrm{H}\delta$ est égal à

$$\mathrm{H}\delta = \mathrm{Q}_0\delta^n + \mathrm{Q}_1\delta^{n-1} + \cdots + \mathrm{Q}_{n-2}\delta^2 + \mathrm{Q}_{n-1}\delta + \mathrm{Q}_n,$$

l'opérateur $\mathrm{H}'\delta$ sera

$$\mathrm{H}'\delta = n\mathrm{Q}_0\delta^{n-1} + (n-1)\mathrm{Q}_1\delta^{n-2} + \cdots + 2\mathrm{Q}_{n-2}\delta + \mathrm{Q}_{n-1},$$

l'opérateur $\mathrm{H}''\delta$ sera

$$\mathrm{H}''\delta = n(n-1)\mathrm{Q}_0\delta^{n-2} + (n-1)(n-2)\mathrm{Q}_1\delta^{n-3} + \cdots + 2\,.\,1\,.\,\mathrm{Q}_{n-2},$$

etc.

Rappelons, enfin, que $\underline{\lfloor n}$ représente la factorielle

$$\underline{\lfloor n} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1) \,.\, n.$$

140. Pour simplifier ces expressions (18), nous utiliserons encore la notation $\overline{b}$ déjà employée au numéro **125**.

$$\overline{b} = \overline{a} + \overline{a}x^{\gamma_1} + \overline{a}x^{\gamma_2} + \cdots + \overline{a}x^{\gamma_j} + \overline{00},$$

où les γ sont des constantes négatives décroissantes (*).

Je dis que l'on aura

$$\delta^m \mathfrak{A}_1 = \left(\mathrm{A}_1^m + \overline{b} \cdot \frac{1}{x^{\gamma_1}} \right) \cdot \mathfrak{A}_1.$$

En effet, d'après (14), on a

$$\delta = \frac{1}{x^{\alpha_1}} \mathrm{D},$$

et comme, d'après (10),

$$\mathfrak{A}_1 = c^{\int_{z_0}^{z} \mathrm{A}_1 x^{\alpha_1} dz},$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D}\mathfrak{A}_1 &= x^{\alpha_1} \,.\, \mathrm{A}_1 \,.\, \mathfrak{A}_1 \\ \text{où} \qquad \mathrm{A}_1 &= \overline{b} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

ensuite,

$$\mathrm{D}^2\mathfrak{A}_1 = x^{\alpha_1}\mathrm{A}_1\mathrm{D}\mathfrak{A}_1 + x^{\alpha_1}(\mathrm{DA}_1) \,.\, \mathfrak{A}_1,$$

ou, en tenant compte de (19),

$$\mathrm{D}^2\mathfrak{A}_1 = \{ x^{2\alpha_1}\mathrm{A}_1^2 + x^{\alpha_1}\overline{b} \}\, \mathfrak{A}_1.$$

(*) Rappelons que $\mathrm{D}\overline{b}$, $\mathrm{D}^2\overline{b}$, ... sont de la classe $\overline{b}$.

Supposons démontré que

$$D^{m-1}\mathcal{A}_1 = \{ x^{(m-1)\alpha_1} A_1^{m-1} + x^{(m-2)\alpha_1}\overline{b} \}\,\mathcal{A}_1. \qquad (20)$$

On aura

$$D^m\mathcal{A}_1 = \{ \cdots \}\, D\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1 D \{ \cdots \},$$

le premier terme est

$$x^{m\alpha_1} A_1^m \mathcal{A}_1 + x^{(m-1)\alpha_1}\overline{b}\mathcal{A}_1,$$

dans le deuxième terme on a

$$\{ \cdots \} = \{ x^{(m-1)\alpha_1} A_1^{m-1} + x^{(m-2)\alpha_1}\overline{b} \} = x^{(m-1)\alpha_1}\overline{b}$$

et

$$D \{ \cdots \} = x^{(m-1)\alpha_1}\overline{b},$$

donc le deuxième terme est de la forme

$$x^{(m-1)\alpha_1}\overline{b} \,.\, \mathcal{A}_1.$$

En ajoutant ce deuxième terme au premier, on a

$$D^m\mathcal{A}_1 = \{ x^{m\alpha_1} A_1^m + x^{(m-1)\alpha_1}\overline{b} \}\,\mathcal{A}_1, \qquad (21)$$

c'est la formule (20) après qu'on a augmenté m d'une unité. Les formules (20) et (21) ont donc lieu quel que soit l'entier m.

Mais nous avons d'après (14)

$$D = x^{\alpha_1}\delta,$$

et, par suite,

$$D^m = x^{m\alpha_1}\delta^m;$$

en substituant dans (21), on a

$$\delta^m\mathcal{A}_1 = \{ A_1^m + \frac{1}{x^{\alpha_1}}\,\overline{b} \} \,.\, \mathcal{A}_1,$$

ce que nous voulions montrer.

* * *

141. On déduit de là que dans (18), on a : 1°

$$(G_1\delta)\mathfrak{A}_1 = \{ G_1(A_1) + \frac{1}{x^{\alpha_1}}\,\overline{b}\,\}\,.\,\mathfrak{A}_1$$

$$(G_1'\delta)\mathfrak{A}_1 = \{ G_1'(A_1) + \frac{1}{x^{\alpha_1}}\,\overline{b}\,\}\,.\,\mathfrak{A}_1,$$

etc.,

et *a fortiori*, puisque $x^{\alpha_1} = (x_1)^{p_1}$,

$$(G_1\delta)\mathfrak{A}_1 = \{ G_1(A_1) + \frac{1}{x_1}\,\overline{b}\,\}\,.\,\mathfrak{A}_1$$

$$(G_1'\delta)\mathfrak{A}_1 = \{ G_1'(A_1) + \frac{1}{x_1}\,\overline{b}\,\}\,.\,\mathfrak{A}_1,$$

etc.

2°

$$\frac{1}{x_1}(H_1\delta)\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{x_1}\,\overline{b}\,.\,\mathfrak{A}_1$$

$$\frac{1}{x_1}(H_1'\delta)\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{x_1}\,\overline{b}\,.\,\mathfrak{A}_1,$$

etc.

Donc, enfin, les formules (18) deviennent :

$$\left.\begin{aligned}
R_n &= G_1(A_1) + \frac{1}{x_1}\,\overline{b}\\
1\,.\,R_{n-1} &= G_1'(A_1) + \frac{1}{x_1}\,\overline{b}\\
1\,.\,2\,.\,R_{n-2} &= G_1''(A_1) + \frac{1}{x_1}\,\overline{b}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\underline{|n_1}\,R_{n-n1} &= G_1^{(n_1)}(A_1) + \frac{1}{x_1}\,\overline{b}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\underline{|n}\,R_0 &= G_1^{(n)}(A_1) + \frac{1}{x_1}\,\overline{b}.
\end{aligned}\right\}\ (12^{bis})$$

* * *

142. Nous avons dit que A_1 est racine de multiplicité n_1 de

$$f_1(A) = 0.$$

Mais comme on a

$$G_1(A) = A^{k-a} f_1(A)$$

et que de plus

$$A_1 \neq 0,$$

alors A_1 sera racine de multiplicité n_1 de

$$G_1(A) = 0.$$

On aura donc dans les formules (12bis)

$$\left.\begin{array}{c} G_1(A_1) = G_1'(A_1) = G_1''(A_1) = \cdots = G_1^{(n_1-1)}(A_1) = 0, \\ G_1^{(n_1)}(A_1) \neq 0. \end{array}\right\} \quad (13^{bis})$$

Opération (α').

143. Le polynôme $F_2\,\Phi_2$ s'obtient en remplaçant (D) par $(x^{\alpha_1}\,\Phi_2)$, ou (δ) par (Φ_2) dans $(F_2 D)$, ou dans l'expression entre { } du premier membre de (17).

L'équation algébrique

$$F_2\Phi_2 = \overline{00},$$

ordonnée par rapport à Φ_2, s'écrira donc

$$R_0\Phi_2^n + R_1\Phi_2^{n-1} + \cdots + R_n = \overline{00}, \qquad (11^{bis})$$

où les coefficients R sont les mêmes qu'aux numéros précédents et satisfont aux relations (12bis) avec (13bis).

Opérations (β') (γ') *et* (δ).

144. Nous ne pouvons que répéter ce qui a été dit aux numéros 96 à 100. Les notations sont les mêmes. Il n'y a qu'à

remplacer les formules (11), (12), (13) par les formules (11^{bis}), (12^{bis}), (13^{bis}) que nous venons de trouver. La différence entre les formules (12) et (12^{bis}) est insignifiante et n'a aucune influence sur le raisonnement. La conclusion sera donc la même, c'est-à-dire que l'on aura

$$m_2 \lesseqgtr n_1.$$

C. Q. F. D.

CHAPITRE III

Calcul du facteur secondaire

§ 1. *Abrégé de la théorie.*

145. Dans l'équation

$$(\mathrm{FD})\mathrm{Y} = \overline{00}\,.\,\mathrm{Y}, \tag{1}$$

nous avons, conformément au chapitre précédent, calculé une radicale φ $\left(\text{c'est un polynôme en } \mathrm{X} = x^{\frac{1}{\mathrm{M}}}\right)$. Nous connaissons par suite le facteur principal

$$\mathrm{T} = c^{\int_{z_0}^{z} \varphi dz}. \tag{2}$$

Pour obtenir le facteur secondaire u, on posera

$$\mathrm{Y} = \mathrm{T}\,.\,u. \tag{3}$$

et cette substitution faite dans (1) donnera une équation différentielle en u.

146. Réunissons dans le premier membre de cette équation les termes dont les coefficients sont de l'ordre le plus élevé. Faisons en sorte, en divisant éventuellement cette équation par une puissance convenable de x, que cet ordre le plus élevé soit zéro.

L'équation en u s'ecrira donc

$$(\mathrm{GD})u = \frac{1}{\mathrm{X}}(\mathrm{HD})u + \overline{00}, \tag{4}$$

où l'opérateur (GD) est de la forme

$$GD = B_0 D^m + B_1 D^{m-1} + \cdots + B_m \qquad (5)$$

(m étant $\gtrless n$)
(les B étant des fonctions de z de la classe $\bar{a}$)
(B_0 ne s'annulant pas dans $z_1 z_2$ [Voir n° 147 qui suit])
et où l'opérateur (HD) est de la forme

$$HD = Q_0 D^n + Q_1 D^{n-1} + \cdots + Q_n, \qquad (6)$$

les Q étant eux-mêmes de la forme

$$Q = \bar{a} + \bar{a}\frac{1}{X} + \bar{a}\frac{1}{X^2} + \cdots + \bar{a}\frac{1}{X^j} + \overline{00}.$$

* * *

147. Dans le chapitre II (n^{os} 122 et 123), pour trouver plus commodément le polynôme φ, nous avons supposé que l'intervalle $z_1 z_2$ était délimité de telle sorte que les coefficients du polynôme φ ne s'annulent pas dans cet intervalle, non plus que le premier coefficient de u.

Maintenant que le polynôme φ est trouvé, nous affranchirons l'intervalle $z_1 z_2$ de ces restrictions. Mais nous en introduirons une autre.

Nous supposerons l'intervalle $z_1 z_2$ tellement délimité, que la fonction de z, représentée par B_0 dans la formule (5), ne s'annule ni à l'intérieur ni sur la frontière de cet intervalle $z_1 z_2$.

Les zéros des fonctions B_0 et ceux du premier coefficient non identiquement nul de la génératrice de P_0 seront les seules valeurs critiques de z exclues dans toute la suite de ce travail.

* * *

148. Le degré m de l'opérateur, polynôme en D, (GD) de

la formule (5) sera appelé par nous la *multiplicité* de la radicale φ (*).

Cette multiplicité m est toujours $\geqslant 1$. (Voir n° 159.)

149. Nous allons voir que, m étant la multiplicité de la radicale considérée, la série génératrice du facteur secondaire u est complètement déterminée quand on donne pour $z = z_0$ les séries génératrices de

$$Y;\ DY;\ \ldots D^{m-1}Y,$$

ou, ce qui revient au même puisque le facteur principal T est connu, quand on donne pour $z = z_0$ les séries génératrices de

$$u,\ Du,\ \ldots D^{m-1}u.$$

150. Montrons d'abord que ce problème comporte au moins une solution.

Soient

$$b_0,\ b_1,\ \ldots b_{m-1} \qquad (7)$$

les fonctions formées par les j premiers termes de ces génératrices données en dernier lieu.

151. Nous supposerons d'abord que ces b soient des constantes, donc $\overline{\mathrm{I}(x\ .\ z\ :\ j)}$.

152. Construisons la fonction $w_0(z)$ déterminée par l'équation différentielle d'ordre m

$$(\mathrm{GD})w_0 = 0, \qquad (8)$$

(*) En d'autres termes, la multiplicité est m lorsque, dans l'équation différentielle du facteur secondaire u, les coefficients de l'ordre le plus élevé sont multipliés par une dérivée $m^{ème}$ de u, sans l'être par une dérivée d'ordre supérieur à m

Ou plus simplement : La multiplicité m est l'ordre de l'équation différentielle en u, équation écrite pour $x = +\infty$.

et par la condition que pour $z = z_0$ l'on ait

$$w_0 = b_0, \quad \mathrm{D}w_0 = b_1, \quad \ldots \mathrm{D}^{m-1}w_0 = b_{m-1}. \tag{9}$$

153. Construisons ensuite successivement les fonctions $w_1 w_2 \ldots w_r \ldots$, dont chacune, w_r, est déterminée par voie de récurrence au moyen de l'équation différentielle d'ordre m

$$(\mathrm{GD})w_r = \frac{1}{\mathrm{X}}(\mathrm{HD})w_{r-1}, \tag{10}$$

et par la condition que pour $z = z_0$ l'on ait

$$w_r = \mathrm{D}w_r = \cdots = \mathrm{D}^{m-1}w_r = 0. \tag{11}$$

154. La fonction w_0 est de la classe $\overline{a}$, donc $\overline{1(xj)}$.

On en déduit, à cause de la forme de (HD) donnée par la formule (6), que w_1 est de la forme

$$w_1 = \frac{a_1^{(1)}}{\mathrm{X}} + \frac{a_1^{(2)}}{\mathrm{X}^2} + \frac{a_1^{(3)}}{\mathrm{X}^3} + \cdots + \frac{a_1^{(j)}}{\mathrm{X}^j} + \overline{00}$$

où les a sont de la classe $\overline{a}$;
puis on déduit de là que

$$w_2 = \frac{a_2^{(2)}}{\mathrm{X}^2} + \frac{a_2^{(3)}}{\mathrm{X}^3} + \cdots + \frac{a_2^{(j)}}{\mathrm{X}^j} + \overline{00},$$

et d'une façon générale

$$w_r = \frac{a_r^{(r)}}{\mathrm{X}^r} + \frac{a_r^{(r+1)}}{\mathrm{X}^{r+1}} + \cdots \frac{a_r^{(j)}}{\mathrm{X}^j} + \overline{00}. \tag{12}$$

155. La fonction

$$u = w_0 + w_1 + \cdots + w_j \tag{13}$$

sera donc de la forme

$$u = w_0 + \frac{s^{(1)}}{X} + \frac{s^{(2)}}{X^2} + \frac{s^{(3)}}{X^3} + \cdots + \frac{s^{(j)}}{X^j} + \overline{00}$$

avec

$$s^{(r)} = a_1^{(r)} + a_2^{(r)} + \cdots + a_r^{(r)},$$

c'est-à-dire qu'elle aura pour génératrice la série

$$w_0 + \frac{s^{(1)}}{X} + \frac{s^{(2)}}{X^2} + \frac{s^{(3)}}{X^3} + \cdots \qquad (14)$$

Or, cette fonction u satisfait à la relation (4)

$$(GD)u = \frac{1}{X}(HD)u + \overline{00},$$

(Voir n° 160.)

et à la condition que pour $z = z_0$ l'on ait

$$u - b_0 = Du - b_1 = \cdots = D^{m-1}u - b_{m-1} = 0,$$

cette fonction u et sa série génératrice (14) satisfont donc aux conditions du problème.

156. Nous avons donc une solution du problème proposé quand les valeurs initiales données au numéro 150 sont des constantes.

En particulier, nous savons former une solution u_r, et sa génératrice, telle que pour $z = z_0$ l'on ait

$$D^r u_r = 1$$

et

$$D^s u_r = 0 \quad (\text{pour } s \neq r).$$

157. Il est bien facile maintenant de former une solution u, et sa génératrice, quand les valeurs initiales du numéro 150 ne

sont pas des constantes, mais naturellement de la classe $\overline{P(X)}$.

La solution est en effet donnée par

$$u = b_0 u_0 + b_1 u_1 + \cdots + b_{m-1} u_{m-1},$$

fonction qui est évidemment de la classe

$$\overline{\mathcal{P}(X)},$$

et dont on forme facilement la série génératrice.

158. Pour achever de démontrer la proposition annoncée au numéro 149, il ne reste plus qu'à établir le théorème suivant :

La série de la forme

$$X^{\bar{n}}\left(\bar{a} + \bar{a}\,\frac{1}{X} + \bar{a}\,\frac{1}{X^2} + \cdots\right)$$

est unique, qui satisfasse à la condition d'engendrer (par la somme de ses j premiers termes) une solution u de

$$(GD)u = \frac{1}{X}(HD)u + \overline{00}$$

et qui, pour $z = z_0$, se réduise, ainsi que ses $(m-1)$ premières dérivées, à des séries données.

(Voir n° 161.)

§ 2. *Développement du numéro 148.*

159. Je dis que la multiplicité m d'une radicale de l'opérateur (FD) ne peut être nulle.

En effet, la radicale de

$$Y = T \,.\, u$$

étant la même que la radicale de T, la fonction u aura la radicale zéro.

Donc l'équation en u doit posséder une radicale zéro.

Or, si la multiplicité était nulle, cela signifierait que l'équation en u serait de la forme

$$u = \frac{1}{X}\{Q_0 D^n + Q_1 D^{n-1} + \cdots + Q_n\}u. \qquad (1)$$

Le premier terme de toute radicale φ de cette équation différentielle est égal au premier terme d'une racine Φ de l'équation algébrique

$$1 = \frac{1}{X}\{Q_0\Phi^n + Q_1\Phi^{n-1} + \cdots + Q_n\}. \qquad (2)$$

Cette équation n'admet aucune racine Φ qui reste finie quand $x = +\infty$. Autrement dit, aucune des racines n'a sa partie principale égale à zéro. Donc l'équation (1) n'a pas de radicale zéro, ce qui est absurde puisque nous avons vu que la fonction u, dont nous sommes partis, avait la radicale zéro. Il est donc impossible d'admettre que la multiplicité est nulle.

C. Q. F. D.

§ 3. *Développement du numéro 155.*

160. Je dis que la fonction

$$u = w_0 + w_1 + \cdots + w_j$$

satisfait à la relation

$$(GD)u - \frac{1}{X}(HD)u = \overline{00}.$$

En effet,

$$(GD - \frac{1}{X} HD)u = (GD - \frac{1}{X} HD)w_0 + (GD - \frac{1}{X} HD)w_1 + \cdots$$
$$+ (GD - \frac{1}{X} HD)w_j = [(GD)w_0] + [-\frac{1}{X}(HD)w_0 + (GD)w_1]$$
$$+ [-\frac{1}{X}(HD)w_1 + (GD)w_2] + \cdots + [-\frac{1}{X}(HD)w_{j-1} + (GD)w_j]$$
$$- \frac{1}{X}(HD)w_j.$$

Tous les termes entre [ ] sont nuls en vertu des formules (8) et (10) des numéros 152 et 153.

Il reste donc

$$(GD - \frac{1}{X} HD)u = -\frac{1}{X}(HD)w_j.$$

Mais en vertu de la formule (12) du numéro 154 où l'on fait $r = j$, on a

$$w_j = \overline{a}\,\frac{1}{X^j} + \overline{00} = \overline{00}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{X}(HD)w_j = \overline{00}.$$

Donc on a bien

$$(GD)u - \frac{1}{X}(HD)u = \overline{00}.$$

C. Q. F. D.

§ 4. *Développement du numéro 158.*

161. Je dis qu'il ne peut y avoir qu'une seule série de la forme

$$X^{\bar{n}}\left(\bar{a} + \bar{a}\frac{1}{X} + \bar{a}\frac{1}{X^2} + \cdots\right),$$

qui satisfasse à la condition d'engendrer (par la somme de ses j premiers termes) une solution u de

$$(GD)u = \frac{1}{X}(HD)u + \overline{00}$$

et qui pour $z = z_0$ se réduise, ainsi que ses $(m - 1)$ premières dérivées, à des séries données.

Démonstration.

S'il y avait deux telles séries, leur différence serait une série

$$X^p\left(a_0 + a_1\frac{1}{X} + a_2\frac{1}{X^2} + \cdots\right) \qquad (1)$$

dont les coefficients a seraient des fonctions de z de la classe $\bar{a}$, se réduisant à zéro, ainsi que leurs $(m - 1)$ premières dérivées pour $z = z_0$.

De plus la fonction

$$v = X^p\left(a_0 + a_1\frac{1}{X} + \cdots + a_j\frac{1}{X_j}\right)$$

satisferait à

$$(GD)v = \frac{1}{X}(HD)v + \overline{00}.$$

Donc on pourrait trouver une valeur de j telle que l'on ait, quelque grand que soit x (dans $\overline{E}$),

$$(GD)v - \frac{1}{X}(HD)v = \overline{\lambda} \cdot I \cdot \frac{X^p}{X}$$

ou

$$(GD)X^p\left(a_0 + \frac{a_1}{X} + \cdots + a_j\frac{1}{X^j}\right) - \frac{1}{X}(HD)(\cdots) = \overline{\lambda} \cdot \overline{1}\,\frac{X^p}{X}$$

ou, en divisant par X^p, qui se comporte comme une constante relativement à l'opérateur D,

$$(GD)\left(a_0 + \frac{a_1}{X} + \cdots + \frac{a_j}{X_j}\right) - \frac{1}{X}(HD)(a_0 + \cdots) = \overline{\lambda} \cdot \overline{1} \cdot \frac{1}{X}.$$

Cette relation devant avoir lieu quelque grand que soit x (dans $\overline{E}$), il faut que

$$(GD)a_0 = 0. \qquad (2)$$

Donc a_0 est une fonction de z satisfaisant à l'équation différentielle (2) qui est d'ordre m, et s'annulant ainsi que ses $(m-1)$ premières dérivées pour $z = z_0$. La seule fonction de z satisfaisant à ces conditions est $a_0 = 0$.

Donc le premier terme de la série (1) est nul.

Mais alors le deuxième terme devient le premier, et il est nul aussi, etc. On voit donc que dans la différence des deux séries génératrices chaque terme est nul.

C. Q. F. D.

CHAPITRE IV

Système fondamental de solutions formelles.

§ 1. *Abrégé de la théorie.*

162. Pour chaque radicale, on pourra, par le chapitre précédent, en variant les conditions initiales, construire plusieurs solutions formelles de l'opérateur (FD).

Soient $Y_1 Y_2 \dots Y_\nu$ des solutions formelles ainsi construites, les radicales étant égales ou inégales. Désignons par

$$W(Y_1 Y_2 \dots Y_\nu)$$

le Wronskien :

$$W(Y_1 Y_2 \dots Y_\nu) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_\nu \\ DY_1 & DY_2 & \dots & DY_\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{\nu-1}Y_1 & D^{\nu-1}Y_2 & \dots & D^{\nu-1}Y_\nu \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

L'expression

$$\frac{W(Y_1, Y_2, \dots Y_\nu)}{T_1 . T_2 \dots T_\nu} \qquad (2)$$

sera une fonction de la classe $\overline{\mathfrak{T}(X)}$. Elle possédera donc une série génératrice

$$X^p\left(A^{(0)} + \frac{A^{(1)}}{X} + \frac{A^{(2)}}{X^2} + \dots\right) \qquad (3)$$

où les A sont de la classe $\bar{a}$.

Nous dirons que les génératrices des fonctions $Y_1 Y_2 \dots Y_\nu$ sont

linéairement indépendantes lorsque la série génératrice (3) n'aura pas tous ses termes identiquement nuls dans l'intervalle $z_1 z_2$.

C'est-à-dire lorsque l'on n'aura pas

$$\frac{W(Y_1 Y_2 \dots Y_\nu)}{T_1 T_2 \dots T_\nu} = \overline{00}.$$

163. Nous dirons de plus que ces génératrices sont *uniformément* indépendantes lorsque le premier coefficient de la série (3), qui n'est pas identiquement nul, ne s'annulera pour aucun point de l'intervalle $z_1 z_2$. A cause de la continuité de la fonction de z que forme ce coefficient, continuité assurée par l'existence d'une dérivée (*), ce coefficient restera, en module, supérieur à un nombre positif fixe dans tout l'intervalle $z_1 z_2$.

164. Dans ce chapitre, nous allons montrer que l'on peut toujours trouver un système de n (**) solutions formelles de (FD) dont les génératrices soient linéairement et uniformément indépendantes.

Un tel système sera appelé système *fondamental* de solutions formelles de (FD).

165. La multiplicité de la radicale φ étant m, il est facile de construire un système de m solutions formelles,

$$T \cdot u_1, \quad T \cdot u_2, \quad \dots \quad T \cdot u_m$$

ayant la même radicale φ, et dont les génératrices soient linéairement et uniformément indépendantes.

(*) Les A sont de la classe $\bar{a}$, donc ils ont chacun une dérivée bornée.

(**) n est l'ordre réel de l'opération (FD) $= P_0 D^n + P_1 D^{n-1} + \dots + P_n$, c'est-à-dire que l'on n'a pas $P_0 = \overline{00}$, sans quoi les solutions formelles Y de (FD)$Y = Y\overline{00}$ satisferaient à $(P_1 D^{n-1} + \dots + P_n) Y = \overline{00} Y$, et l'ordre réel serait $< n$.

En effet, il faut qu'en aucun point de l'intervalle $z_1 z_2$ l'on n'ait

$$W(T.u_1,\ T.u_2,\ \ldots\ T.u_m) = T^m.\overline{00}.$$

166. Or, quelles que soient les fonctions T et u, on a identiquement

$$W(T.u_1,\ T.u_2,\ \ldots\ T.u_m) = T^m.W(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m).$$

(Voir n° 173.)

167. Donc, il nous faut trouver un système de facteurs secondaires $u_1 u_2 \ldots u_m$ tel qu'en aucun point de $z_1 z_2$ l'on n'ait

$$W(u_1 u_2 \ldots u_m) = \overline{00}.$$

Nous déterminerons ces fonctions secondaires, conformément au numéro 149, par les valeurs au point $z = z_0$ de ces fonctions et de leurs $(m-1)$ premières dérivées. Et nous choisirons pour ces valeurs en z_0 des nombres constants $\big(I(x,z,j)\big)$ et tels que pour $z = z_0$ l'on ait

$$W(u_1 u_2 \ldots u_m) \neq 0.$$

— Par exemple on pourra choisir les facteurs secondaires du numéro 156 —

Les génératrices des m facteurs secondaires ainsi déterminés seront linéairement et uniformément indépendantes. C'est-à-dire qu'en aucun point de l'intervalle $z_1 z_2$ l'on n'aura

$$W(u_1 u_2 \ldots u_m) = \overline{00},$$

et par conséquent non plus

$$W(Tu_1, Tu_2, \ldots Tu_m) = T^m.\overline{00}.$$

(Voir n° 174.)

168. Le cas où les radicales ne sont pas toutes les mêmes se ramène au cas où les radicales sont toutes égales par un théorème en vertu duquel, pour qu'un système de solutions formelles

$$Y_1\ Y_2\ \dots\ Y_\nu$$

ait ses génératrices linéairement et uniformément indépendantes, il faut et il suffit que cette propriété appartienne à chacun des groupes formés en réunissant celles de ces solutions formelles qui ont la même radicale.

(Voir n^{os} 175 à 186.)

169. Nous sommes donc en état de construire un système de ν solutions formelles de (FD), à génératrices linéairement et uniformément indépendantes, lorsque ce nombre ν est

$$\nu = m_1 + m_2 + \dots + m_p,$$

où $m_1, m_2, \dots m_p$ sont les multiplicités de toutes les radicales différentes

$$\varphi_1\ \varphi_2\ \dots\ \varphi_p$$

que l'on peut construire conformément au chapitre II.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que ce nombre ν est nécessairement égal à n.

170. Pour cela, nous démontrerons d'abord que le nombre ν ne peut être supérieur à n.

(Voir n° 187.)

171. Puis nous montrerons que ce nombre

$$m_1 + m_2 + \dots m_p$$

ne peut être inférieur à n.

(Voir n^{os} 188 à 203.)

172. On aura donc bien

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n,$$

c'est-à-dire :

La somme des multiplicités de toutes les radicales est égale à l'ordre de l'équation différentielle.

§ 2. *Développement du numéro 166.*

173. Pour démontrer la formule

$$W(T.u_1,\ T.u_2,\ \ldots\ T.u_m) = T^m.W(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m),$$

multiplions, colonne par colonne, les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} T & DT & D^2T & \ldots & D^{m-1}T \\ 0 & T & 2DT & \ldots & C^1_{m-1}D^{m-2}T \\ 0 & 0 & T & \ldots & C^2_{m-1}D^{m-3}T \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & T \end{vmatrix} = T^m$$

et

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \ldots & u_m \\ Du_1 & Du_2 & Du_3 & \ldots & Du_m \\ D^2u_1 & D^2u_2 & D^2u_3 & \ldots & D^2u_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ D^{m-1}u_1 & D^{m-1}u_2 & D^{m-1}u_3 & \ldots & D^{m-1}u_m \end{vmatrix} = W(u_1u_2 \ldots u_m),$$

on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} Tu_1 & Tu_2 & Tu_3 & \ldots & Tu_m \\ DTu_1 & DTu_2 & DTu_3 & \ldots & DTu_m \\ D^2Tu_1 & D^2Tu_2 & D^2Tu_3 & \ldots & D^2Tu_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ D^{m-1}Tu_1 & D^{m-1}Tu_2 & D^{m-1}Tu_3 & \ldots & D^{m-1}Tu_m \end{vmatrix} = W(Tu_1, Tu_2, \ldots Tu_m).$$

Donc

$$T^m \cdot W(u_1 u_2 \dots u_m) = W(Tu_1, Tu_2, \dots Tu_m).$$

C. Q. F. D.

§ 3. *Développement relatif au numéro 167.*

174. La multiplicité de la radicale φ étant m et les facteurs secondaires $u_1 u_2 \dots u_m$ étant relatifs à cette même radicale, et ayant, ainsi que leurs $(m-1)$ premières dérivées, des valeurs constantes [c'est-à-dire $I(xzj)$] au point $z = z_0$, il nous faut montrer que si en ce point z_0 l'on a

$$W(u_1 u_2 \dots u_m) \neq 0, \qquad (1)$$

il nous faut montrer qu'alors cette relation s'étendra à tous les points de l'intervalle $z_1 z_2$.

Démonstration.

D'après ce que nous avons vu au numéro **155**, chacune des fonctions u_r $(r = 1, 2, \dots m)$ aura une génératrice de la forme

$$s_r^{(0)} + s_r^{(1)} \frac{1}{X} + s_r^{(2)} \frac{1}{X^2} + \dots$$

où les s sont de la classe $\overline{a}$

Et le Wronskien $W(u_1 u_2 \dots u_m)$ aura par suite une génératrice de la forme

$$A^{(0)} + A^{(1)} \frac{1}{X} + A^{(2)} \frac{1}{X^2} + \dots$$

les A étant de la classe $\overline{a}$.

Nous allons démontrer que le premier terme $A^{(0)}$ de cette série ne s'annule en aucun point de l'intervalle $z_1 z_2$.

En effet, on a

$$A^{(0)} = W(s_1^{(0)} s_2^{(0)} \dots s_m^{(0)}). \qquad (2)$$

Par hypothèse, pour $z = z_0$, on a

$$u_r = s_r^{(0)},$$

donc le deuxième membre de (2) est égal à la valeur en z_0 de $W(u_1 u_2 \dots u_m)$ et par suite, à cause de (1), on a, au point $z = z_0$

$$W(s_1^{(0)} s_2^{(0)} \dots s_m^{(0)}) \neq 0. \qquad (3)$$

Mais (d'après le n° 152, où l'on remplace w_0 par $s^{(0)}$) (*) les fonctions de z représentées par $s_1^{(0)} s_2^{(0)} \dots s_m^{(0)}$ satisfont à

$$(GD)s^{(0)} = 0, \qquad (4)$$

c'est-à-dire

$$(B_0 D^m + B_1 D^{m-1} + \dots B_m)s^{(0)} = 0, \qquad (4)$$

où, d'après la restriction du numéro 147, le coefficient B_0 est une fonction de z restant en module supérieure à un nombre fixe dans tout l'intervalle $z_1 z_2$ (**).

D'après un théorème de P. Appell, les solutions $s_1^{(0)} s_2^{(0)} \dots s_m^{(0)}$ de l'équation (4) satisfont à la formule

$$W(s_1^{(0)} s_2^{(0)} \dots s_m^0) = [W]_{z=z_0} \cdot c^{\int_{z_0}^{z} -\frac{B_1}{B_0} dz}. \qquad (5)$$

(*) Cela résulte d'ailleurs directement de ce que $u = s^{(0)} + \frac{\overline{\lambda} \cdot \overline{I}}{X}$, donc $s^0 = u + \frac{\overline{\lambda} \cdot \overline{I}}{X}$, le facteur secondaire u satisfaisant à $(GD)u = \frac{1}{X}(HD)u + \overline{00}$.

(**) Cette restriction exclut seulement les zéros de B_0. Mais à cause de la continuité assurée par l'existence d'une dérivée (B_0 est de la classe a), cette fonction B_0 reste en module supérieure à un nombre fixe.

Comme la fonction $\frac{B_1}{B_0}$ est une fonction de z bornée dans l'intervalle $z_1 z_2$, on voit que la fonction

$$W(s_1^0 s_2^0 \dots s_m^0) = A^0 \qquad (2)$$

reste en module supérieure à un nombre fixe dans l'intervalle $z_1 z_2$.

C. Q. F. D.

§ 4. *Développement relatif au numéro 168.*

THÉORÈME.

175. Les fonctions

$$Y_1 Y_2 \dots Y_\nu$$

étant chacune composée d'un facteur principal

$$T = c^{\int_{z^\dagger}^{z} \varphi dz}$$

(φ étant un polynome en X) et d'un facteur secondaire

$$u = \overline{\mathcal{L}^0}(X),$$

je dis que, si ces fonctions se partagent en groupes

$$(Y_1 Y_2 \dots Y_a)(Y_{a+1} Y_{a+2} \dots Y_b) \dots\dots (Y_{k+1} \dots Y_\nu),$$

groupes tels que dans chacun d'eux la radicale φ (et par suite aussi le facteur principal T) soit la même, tandis qu'elle diffère d'un groupe à l'autre; je dis qu'alors la relation

$$\frac{W(Y_1 Y_2 \dots Y_\nu)}{T_1 T_2 \dots T_\nu} = \overline{00}$$

ne pourra exister que si une relation semblable existe dans l'un des groupes; par exemple dans le premier, donc si

$$\frac{W(Y_1Y_2 \dots Y_a)}{T_1T_2 \dots T_a} = \overline{00}$$

(où $T_1 = T_2 = \dots = T_a$).

Démonstration dans le cas de $\nu = 2$.

176. Si Y_1 et Y_2 ont même radicale, le théorème est évident, puisqu'il n'y a qu'un groupe.

177. Si les radicales φ_1 et φ_2 sont différentes, je dis que la relation

$$\frac{W(Y_1Y_2)}{T_1T_2} = \overline{00} \qquad (1)$$

ne pourra pas avoir lieu si l'on n'a pas soit

$$\frac{W(Y_1)}{T_1} = \overline{00}, \text{ c'est-à-dire } \frac{Y_1}{T_1} = \overline{00};$$

$$\text{soit } \frac{W(Y_2)}{T_2} = \overline{00}, \text{ c'est-à-dire } \frac{Y_2}{T_2} = \overline{00}.$$

Supposons en effet que, en posant

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= T_1u_1 \\ Y_2 &= T_2u_2, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

l'on n'ait ni

$$u_1 = \overline{00}$$

ni

$$u_2 = \overline{00}. \qquad (3)$$

Alors u_1 aura une génératrice :

$$X^p\left(a_0 + \frac{a_1}{X} + \dots\right) \qquad \text{avec } a_0 \neq 0,$$

de même u_2 aura une génératrice

$$X^q\left(b_0 + \frac{b_1}{X} + \cdots\right) \qquad \text{avec } b_0 \neq 0.$$

En posant

$$u_1 = X^p \,.\, u_1'$$
$$u_2 = X^q \,.\, u_2'$$

et

$$Y_1 = X^p Y_1'$$
$$Y_2 = X^q Y_2',$$

nous aurons

$$\frac{W(Y_1 Y_2)}{T_1 T_2} = X^{p+q} \frac{W(Y_1' Y_2')}{T_1 T_2},$$

et pour que

$$\frac{W(Y_1 Y_2)}{T_1 T_2} = \overline{00},$$

il faut et suffit que

$$\frac{W(Y_1' Y_2')}{T_1 T_2} = \overline{00},$$

les facteurs secondaires u_1' et u_2' de Y_1' et Y_2' ont pour génératrices

$$a_0 + \frac{a_1}{X} + \frac{a_2}{X^2} + \cdots$$

et

$$b_0 + \frac{b_1}{X} + \frac{b_2}{X^2} + \cdots$$

Nous sommes donc ramenés au cas où $p = q = o$.

178. Nous supprimerons les accents et nous supposerons donc

$$Y_1 = T_1 \,.\, u_1 \qquad (4)$$

avec

$$u_1 = a_0 + \frac{a_1}{X} + \cdots + \frac{a_j}{X^j} + \overline{00}, \tag{5}$$

$$(a_0 \neq 0), \tag{6}$$

et

$$Y_2 = T_2 \,.\, u_2 \tag{7}$$

avec

$$u_2 = b_0 + \frac{b_1}{X} + \cdots + \frac{b_j}{X^j} + \overline{00}, \tag{8}$$

$$(b_0 \neq 0). \tag{9}$$

On a

$$W(Y_1Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ DY_1 & DY_2 \end{vmatrix} = Y_1Y_2\left(\frac{DY_2}{Y_2} - \frac{DY_1}{Y_1}\right)$$

$$= (T_1u_1)\,(T_2u_2)\,.\left[\frac{DT_2}{T_2} + \frac{Du_2}{u_2} - \frac{DT_1}{T_1} - \frac{Du_1}{u_1}\right]$$

$$= T_1\,.\,T_2\,.\,u_1\,.\,u_2\,.\left[\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{Du_2}{u_2} - \frac{Du_1}{u_1}\right],$$

donc,

$$\frac{W(Y_1Y_2)}{T_1T_2} = u_1u_2(\varphi_2 - \varphi_1) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ Du_1 & Du_2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

A cause de (6) et (9), l'expression

$$u_1\,.\,u_2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

est, quel que soit j, un infiniment grand (pour $x = +\infty$) dont l'ordre est celui de $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Au contraire, l'expression

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ Du_1 & Du_2 \end{vmatrix}$$

reste finie pour $x = +\infty$. Donc le second membre de (10) est infiniment grand pour $x = +\infty$, quel que soit j.

Il ne peut donc pas être de la classe $\overline{00}$. C. Q. F. D.

Démonstration dans le cas de $\nu > 2$.

179. Nous allons maintenant étendre le théorème pour un ν quelconque > 2, en le supposant vrai jusque $(\nu - 1)$.

Si les fonctions $Y_1 Y_2 \ldots\ldots Y_\nu$ ont toutes la même radicale et ne forment donc qu'un seul groupe comprenant les ν fonctions, le théorème dégénère en une simple tautologie.

Si l'un des groupes renferme $(\nu - 1)$ fonctions, nous donnerons l'indice 1 à l'une des fonctions de ce groupe. L'autre groupe ne renferme dans ce cas qu'une seule fonction, et ce nombre 1 est inférieur à $(\nu - 1)$, parce que nous supposons $\nu > 2$.

180. De toutes façons, le cas de la tautologie étant mis de côté, nous voyons que les groupes qui ne renfermeront pas Y_1 posséderont un nombre de fonctions inférieur à $(\nu - 1)$.

181. Cela posé, rappelons la formule du numéro 166, qui peut s'écrire :

$$W(Y_0 Y_1, Y_0 Y_2, \ldots Y_0 Y_\nu) = Y_0^\nu \cdot W(Y_1, Y_2, \ldots Y_\nu).$$

Si dans cette formule on fait

$$Y_0 = \frac{1}{Y_1},$$

on obtient

$$W\left(1, \frac{Y_2}{Y_1}, \ldots \frac{Y_\nu}{Y_1}\right) = \left(\frac{1}{Y_1}\right)^\nu \cdot W(Y_1, Y_2, \ldots Y_\nu),$$

ou

$$W(Y_1, Y_2, \ldots Y_\nu) = Y_1^\nu \cdot W\left(1, \frac{Y_2}{Y_1}, \ldots \frac{Y_\nu}{Y_1}\right),$$

ou enfin

$$W(Y_1, Y_2, \dots Y_\nu) = Y_1^\nu \cdot W\left[D\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right), D\left(\frac{Y_3}{Y_1}\right), \dots D\left(\frac{Y_\nu}{Y_1}\right)\right]. \quad (1)$$

On voit que cette formule ramène un Wronskien d'ordre ν à un Wronskien d'ordre $(\nu - 1)$.

182. Nous poserons comme d'habitude

$$Y_1 = T_1 \cdot u_1,$$

u_1 étant le facteur secondaire de Y_1.

183. Si l'on a

$$u_1 = \overline{00},$$

alors on aura

$$TY_1 = \overline{00} \cdot T_1,$$

et pour tout Wronskien renfermant Y_1, tel que $W(Y_1, Y_2, \dots\dots Y_a)$, on aura

$$W(Y_1 Y_2 \dots Y_a) = \overline{00} \cdot T_1 \cdot T_2 \dots T_a,$$

le théorème est alors démontré.

184. Supposons donc que l'on n'ait pas

$$u_1 = \overline{00}.$$

Par la formule (1), la relation

$$W(Y_1, Y_2, \dots Y_\nu) = \overline{00} \cdot T_1 \cdot T_2 \dots T_\nu$$

entraînera

$$T_1^\nu W\left[D\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right), \dots D\left(\frac{Y_\nu}{Y_1}\right)\right] = \overline{00} \cdot T_1 \cdot T_2 \dots T_\nu,$$

ou, en posant

$$\frac{T_2}{T_1} = \theta_2;\ \frac{T_3}{T_1} = \theta_3;\ \ldots\ \frac{T_\nu}{T_1} = \theta_\nu, \qquad (2)$$

$$W\left[D\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right), \ldots D\left(\frac{Y_\nu}{Y_1}\right)\right] = \overline{00}\,.\,\theta_2\,.\,\theta_3 \ldots \theta_\nu. \qquad (3)$$

Mais $\theta_2, \theta_3, \ldots\ldots \theta_\nu$ sont les facteurs principaux de

$$D\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right), D\left(\frac{Y_3}{Y_1}\right), \ldots D\left(\frac{Y_\nu}{Y_1}\right),$$

et comme le Wronskien qui entre dans la formule (3) est d'ordre $(\nu-1) < \nu$, le théorème proposé est applicable à cette formule.

La relation (3) exige donc qu'une relation semblable existe :

A) Ou bien pour le groupe

$$D\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right), D\left(\frac{Y_3}{Y_1}\right), \ldots D\left(\frac{Y_a}{Y_1}\right),$$

dont toutes les fonctions possèdent le même facteur principal $\theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_a$;

B) Ou bien pour un autre groupe tel que

$$D\left(\frac{Y_{a+1}}{Y_1}\right), D\left(\frac{Y_{a+2}}{Y_1}\right), \ldots D\left(\frac{Y_b}{Y_1}\right),$$

dont toutes les fonctions possèdent le même facteur principal $\theta_{a+1} = \theta_{a+2} = \ldots = \theta_b$.

185. Examinons d'abord l'éventualité A.

On a alors

$$W\left[D\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right), D\left(\frac{Y_3}{Y_1}\right), \ldots D\left(\frac{Y_a}{Y_1}\right)\right] = \overline{00}\,.\,\theta_2\,.\,\theta_3 \ldots \theta_a$$

$$= \overline{00} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_3}{T_1} \cdots \frac{T_a}{T_1},$$

ou

$$T_1^a \cdot W\left[D\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right), D\left(\frac{Y_3}{Y_1}\right), \dots D\left(\frac{Y_a}{Y_1}\right)\right] = \overline{00} \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \dots T_a,$$

ou par la formule (1) appliquée à rebours (après avoir remplacé dans le premier membre de la relation ci-dessus T_1 par Y_1, ce qu'on peut faire parce que $u_1 \neq \overline{00}$) :

$$W(Y_1, Y_2, Y_3, \dots Y_a) = \overline{00} \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \dots T_a,$$

et le théorème est vérifié.

186. Examinons maintenant l'éventualité B.
On a alors

$$W\left[D\left(\frac{Y_{a+1}}{Y_1}\right), \dots D\left(\frac{Y_b}{Y_1}\right)\right] = \overline{00} \cdot \theta_{a+1} \dots \theta_b$$
$$= \overline{00} \cdot \frac{T_{a+1}}{T_1} \dots \frac{T_b}{T_1},$$

ou

$$T_1^{b-a+1} \cdot W\left[D\left(\frac{Y_{a+1}}{Y_1}\right), \dots D\left(\frac{Y_b}{Y_1}\right)\right] = \overline{00} \cdot T_1 \cdot T_{a+1} \cdot T_{a+2} \dots T_b,$$

ou, puisque l'on n'a pas $u_1 = \overline{00}$,

$$Y_1^{b-a+1} \cdot W\left[D\left(\frac{Y_{a+1}}{Y_1}\right), \dots D\left(\frac{Y_b}{Y_1}\right)\right] = \overline{00} \cdot T_1 \cdot T_{a+1} \dots T_b,$$

ou par la formule (1)

$$W(Y_1, Y_{a+1}, Y_{a+2}, \dots Y_b) = \overline{00}\, T_1 \cdot T_{a+1} \cdot T_{a+2} \dots T_b. \qquad (4)$$

Dans cette relation, les fonctions $Y_1 Y_{a+1} Y_{a+2} \dots Y_b$ se partagent en deux groupes :

Le groupe (Y_1) dont le facteur principal est T_1;

Le groupe (Y_{a+1}, Y_{a+2}, Y_b), dont les facteurs principaux sont $T_{a+1} = T_{a+2} \dots = T_b$.

Ce dernier groupe ne renferme pas Y_1, donc d'après le numéro 180 le nombre des fonctions qu'il renferme est inférieur à $(\nu-1)$. Et par conséquent le nombre des fonctions qui entrent dans le Wronskien de la formule (4) est inférieur à ν. Mais alors le théorème proposé est applicable à cette formule (4), et cette relation (4) exige que l'on ait

α) ou bien

$$W(Y_1) = \overline{00} \cdot T_1,$$

β) ou bien

$$W(Y_{a+1}, Y_{a+2}, \dots Y_b) = \overline{00} \cdot T_{a+1} \cdot T_{a+2} \dots T_b.$$

L'hypothèse (α) s'écrit

$$Y_1 = \overline{00}\, T_1,$$

ou

$$u_1 = \overline{00}.$$

Nous avons exclu cette hypothèse au commencement du numéro 184. Il ne reste donc que l'hypothèse (β). Elle confirme le théorème proposé.

§ 5. *Développement du numéro 170.*

187. Si l'opération (FD) est effectivement d'ordre n, c'est-à-dire si dans

$$FD = P_0 D^n + P_1 D^{n-1} + \dots + P_n$$

le coefficient P_0 n'est pas asymptotiquement nul,

$$P_0 \neq \overline{00},$$

je dis qu'il sera impossible de construire des solutions formelles, à génératrices linéairement et uniformément indépendantes, en nombre ν supérieur à n.

Car si $Y_1, Y_2, \ldots Y_n, Y_{n+1}$ étaient de telles solutions formelles, on aurait

$$\begin{aligned}
&P_0 D^n Y_1 + P_1 D^{n-1} Y_1 + \cdots\cdots + P_n Y_1 = \overline{00} \,.\, Y_1 \\
&P_0 D^n Y_2 + P_1 D^{n-1} Y_2 + \cdots\cdots + P_n Y_2 = \overline{00} \,.\, Y_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&P_0 D^n Y_{n+1} + P_1 D^n Y_{n+1} + \cdots\cdots + P_n Y_{n+1} = \overline{00} \,.\, Y_{n+1},
\end{aligned}$$

et en résolvant par rapport à P_0, on obtiendrait

$$P_0 = \frac{\Sigma_r \overline{00} \,.\, Y_r \,.\, W(Y_1 Y_2 \ldots Y_r \ldots Y_{n+1})}{W(Y_1 Y_2 \ldots Y_r \ldots Y_{n+1})}. \qquad (1)$$

Divisons haut et bas par $Y_1 Y_2 \ldots Y_r \ldots Y_{n+1}$ et remarquons que le dénominateur

$$\frac{W(Y_1 Y_2 \ldots Y_r \ldots Y_{n+1})}{Y_1 Y_2 \ldots Y_r \ldots Y_{n+1}}$$

est de la forme

$$X^p \left(A^{(0)} + \frac{A^{(1)}}{X} + \cdots + \frac{A^{(j)}}{X^j} \right) + \overline{00},$$

où $A^{(0)}$ reste supérieur à un nombre fixe, et que, par conséquent, l'inverse de ce dénominateur est de la classe $\overline{P(x)}$, donc dans la zone $\bar{z}$, ainsi que ses dérivées, et nous en conclurons que la formule (1) donne

$$P_0 = (\Sigma \overline{00} \,.\, \bar{z}) \,.\, \bar{z} = \overline{00}.$$

Donc on voit bien que ν ne peut surpasser n si l'on n'a pas

$$P_0 = \overline{00}.$$

C. Q. F. D.

§ 6. *Développement du numéro 171.*

188. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ les différentes radicales de (FD) et soient $m_1, m_2, \ldots m_p$ leurs multiplicités. Je dis que la somme

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_p$$

ne peut être inférieure à l'ordre n de (FD).

Démonstration.

189. Pour $n = 1$, il suffit d'appliquer le théorème démontré au numéro 159.

190. Pour $n > 1$, nous démontrerons le théorème pour un opérateur d'ordre n, en le supposant vrai pour les opérateurs d'ordre $< n$.

Désignons par φ_0 une des radicales $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_p$ choisie de telle sorte que pour x suffisamment grand, c'est-à-dire pour $x > x_0$, l'on ait

$$\mathrm{R}(\varphi_r - \varphi_0) \geqslant 0 \qquad (1)$$

(R désignant la partie réelle; par exemple $\mathrm{R}(3+5\sqrt{-1}) = 3$)

Si cette relation (1) ne pouvait à s'étendre tout l'intervalle z_1z_2, on partagerait cet intervalle en intervalles partiels pour chacun desquels on puisse écrire la relation (1) moyennant un choix convenable de φ_0. Et nous verrons que pour chacun de ces intervalles partiels on aura

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_p \geq n,$$

donc aussi pour l'intervalle total.

191. Nous considérerons donc l'un de ces intervalles partiels et nous le désignerons, dans tout ce paragraphe, par $z_1 z_2$. Donc dans tout l'intervalle $z_1 z_2$ l'on a

$$R(\varphi_r - \varphi_0) \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots p).$$

192. Soit Y_0 une solution formelle de (FD) ayant la radicale φ_0.

Y étant une autre (*) solution formelle de (FD), la fonction

$$D\frac{Y}{Y_0} = Z \qquad (2)$$

sera solution formelle d'un certain opérateur (KD), d'ordre $(n-1)$ en D, et à coefficients de la forme $\overline{P(x)}$, opérateur que nous allons former.

Mais avant de construire cet opérateur (KD), remarquons que, T et T_0 étant les facteurs principaux de Y et Y_0, Z aura la forme

$$Z = \frac{T}{T_0} \cdot \overline{\mathfrak{P}}(X),$$

ce sera donc bien la forme d'une solution formelle, avec le facteur principal $\frac{T}{T_0}$, donc avec la radicale

$$\psi = \varphi - \varphi_0. \qquad (2^{bis})$$

193. Il nous reste à montrer l'existence de l'opérateur (KD) d'ordre $(n-1)$, à coefficients $\overline{P(x)}$, et tel que

$$(KD)Z = \overline{00} \cdot \frac{T}{T_0},$$

c'est ce que nous allons faire aux numéros 195 à 197.

194. Quand l'existence de (KD) sera établie, comme cet opérateur sera d'ordre $(n-1) < n$, nous pourrons lui appliquer le théorème proposé, et nous parviendrons ensuite à étendre ce théorème à l'opérateur (FD). C'est ce que nous ferons aux numéros 198 à 202.

Opérateur (KD).

195. Soit Z_1 la valeur pour $z = z_1$ de $D\left(\frac{Y}{Y_0}\right)$. La relation (2) donnera

$$Y = Y_0 \{ Z_1 + \int_{z_1}^{z} Z dz \}. \tag{3}$$

Posons pour abréger

$$Z_1 + \int_{z_1}^{z} Z dz = V, \tag{4}$$

donc

$$Y = Y_0 . V,$$

cette substitution faite dans (FD)Y donne

$$(FD)Y = V . (FD)Y_0$$
$$+ \left\{ \frac{DV}{1} \cdot (F'D)Y_0 + \frac{D^2V}{1.2} \cdot (F''D)Y_0 + \cdots + \frac{D^nV}{\underline{|n}} \cdot (F^{(n)}D)Y \right\}. \tag{5}$$

Dans l'expression entre { }, le coefficient de D^nV est

$$\frac{1}{\underline{|n}} (F^{(n)}D)Y_0 = \frac{1}{\underline{|n}} \cdot \underline{|n} . P_0 . Y_0 = P_0 . Y_0,$$

et toute cette expression entre { } est de la forme

$$\{ \cdots \} = Y_0 [P_0 D^{n-1} + Q_1 D^{n-2} + \cdots + Q_n] DV,$$

où les Q sont de la classe $\overline{\mathcal{F}}(x)$.

196. Nous représenterons l'opérateur entre [ ] par (KD).

197. Donc l'expression entre { } dans (5) est

$$\{\cdots\} = Y_0 . (KD)DV,$$

mais, d'après (4),

$$DV = Z,$$

donc,

$$\{\cdots\} = Y . (KD)Z$$

et la relation (5) devient

$$(FD)Y = V . (FD)Y_0 + Y_0 . (KD)Z,$$

ou

$$(KD)Z = \frac{1}{Y_0}(FD)Y - \frac{V . (FD)Y_0}{Y_0}, \qquad (6)$$

mais

$$\frac{(FD)Y_0}{Y_0} = \overline{00}$$

et

$$(FD)Y = \overline{00} . T,$$

et par suite

$$\frac{(FD)Y}{Y_0} = \overline{00} \cdot \frac{T}{Y_0} = \overline{00}\,\frac{T}{T_0},$$

donc (6) devient

$$(KD)Z = \overline{00} \cdot \frac{T}{T_0} - \overline{00} . V. \qquad (7)$$

Enfin, dans la relation (4)

$$V = Z_1 + \int_{z_1}^{z} Z dz,$$

on a

$$Z = \frac{T}{T}\,\overline{\mathfrak{T}}(x),$$

donc

$$Z = \frac{T}{T_0} \cdot \bar{z},$$

et, pour $z = z_0$

$$Z_1 = 1 \,.\, \bar{z},$$

et *a fortiori*, puisque $1 < \left|\frac{T}{T_0}\right|$ (à cause de (1)),

$$Z_1 = \frac{T}{T_0} \cdot \bar{z}.$$

Donc (4) donne

$$V = \frac{T}{T_0}\bar{z} + \int_{z_1}^{z} \frac{T}{T_0}\bar{z} \,.\, dz. \qquad (8)$$

Mais, à cause de (1), dans l'intervalle $(z_1 z_2)$, le module $\left|\frac{T}{T_0}\right|$ est non décroissant, et l'on peut appliquer le théorème du numéro 55, qui donnera

$$\int_{z_1}^{z} \frac{T}{T_0}\bar{z} \,.\, dz = \frac{T}{T_0}\bar{z},$$

par suite (8) devient

$$V = \frac{T}{T_0} \cdot \bar{z},$$

donc

$$\overline{00} \,.\, V = \frac{T}{T_0} \cdot \overline{00}.$$

En portant cette valeur dans (7), on obtient enfin

$$(KD)Z = \overline{00}\,\frac{T}{T_0}.$$

Et l'on voit que l'opérateur (KD) défini au numéro 196 possède toutes les propriétés requises au numéro 193.

RELATION ENTRE LES MULTIPLICITÉS DANS (KD) ET DANS (FD).

198. Nous savons par la formule (2^{bis}) du numéro 192 qu'à chaque radicale ψ de (KD) il correspond une radicale φ de (FD) donnée par la relation

$$\psi = \varphi - \varphi_0,$$

ou

$$\varphi = \psi + \varphi_0. \qquad (9)$$

Toutes les radicales de (FD) sont d'abord celles qui se déduisent des radicales de (KD) par cette formule (9), ensuite la radicale φ_0.

Cela posé, nous allons démontrer que, μ étant la multiplicité de ψ dans (KD),

1° Si $\psi \neq 0$, la multiplicité m dans (FD) de

$$\varphi = \psi + \varphi_0$$

sera

$$m = \mu;$$

2° Si $\psi = 0$, la multiplicité m dans (FD) de

$$\varphi = \psi + \varphi_0$$

sera

$$m = \mu + 1.$$

199. Quand ces deux points seront établis, notre proposition du numéro 188 sera démontrée.

En effet, soient

$$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_q$$

les radicales différentes de (KD), et

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_q$$

leurs multiplicités, dont nous admettons que

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_q \geqq (n-1).$$

1° Si tous les ψ sont $\neq 0$, les radicales différentes de (FD) seront

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \psi_1 + \varphi_0 \\
\varphi_2 &= \psi_2 + \varphi_0 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_q &= \psi_q + \varphi_0
\end{aligned}$$

et

$$\varphi_0$$

et leurs multiplicités seront

$$\begin{aligned}
m_1 &= \mu_1 \\
m_2 &= \mu_2 \\
&\cdots\cdots \\
m_q &= \mu_q \\
m_0 &\geqq 1,
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
m_1 + m_2 + \cdots + m_q + m_0 &\geqq (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu) + 1 \\
&\geq (n-1) + 1,
\end{aligned}$$

donc

$$m_1 + m_2 + \cdots m_q + m \geqq n,$$

ce qui est conforme à l'énoncé du numéro 188.

2° Si l'une des radicales $\psi_1 \ldots \psi_q$ est nulle, par exemple si

$$\psi_q = 0,$$

alors les radicales de (FD) seront

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \psi_1 + \varphi_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{q-1} &= \psi_{q-1} + \varphi_0 \\
\varphi_q &= 0 + \varphi_0,
\end{aligned}$$

et leurs multiplicités

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ m_{q-1} &= \mu_{q-1} \\ m_q &= \mu_q + 1, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + \cdots + m_{q-1} + m_q &= (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_q) + 1 \\ &\leqq (n-1) + 1 \\ &\leqq n \end{aligned}$$

et l'énoncé du numéro 188 est encore confirmé.

Démonstration du premier point.

200. Il faut montrer que si la radicale ψ de (KD) est $\neq 0$ et possède la multiplicité μ, il faut montrer qu'alors la radicale

$$\varphi = \psi + \varphi_0 \tag{9}$$

de (F'D) aura une multiplicité m égale à μ.

Dire que φ est radicale de multiplicité m dans l'équation

$$(\mathrm{FD})\,\mathrm{Y} = \overline{00}\,.\,\mathrm{T}, \tag{10}$$

cela veut dire, selon la définition du numéro 148, que si dans cette équation l'on pose

$$\mathrm{Y} = \mathrm{T}\,.\,u \tag{11}$$

où

$$\mathrm{T} = c^{\int_{z_0}^{z} \varphi dz},$$

cela veut dire que l'on obtiendra une équation en u de la forme

$$(GD)u = \frac{1}{X}(HD)u + \overline{00}, \tag{12}$$

où l'opérateur (GD) est d'ordre m.

De même, en disant que ψ est radicale de multiplicité μ dans

$$(KD)Z = \overline{00}\,Z, \tag{13}$$

nous exprimons que si dans cette relation l'on pose

$$Z = \theta \,.\, v \tag{14}$$

avec

$$\theta = c^{\int_{z_0}^{z} \psi dz}, \tag{14^{bis}}$$

nous obtiendrons une équation en v de la forme

$$(g\mathrm{D})v = \frac{1}{X}(h\mathrm{D})v + \overline{00}, \tag{15}$$

où l'opérateur $(g\mathrm{D})$ est d'ordre μ.

201. Mais pour obtenir l'équation en u (12), qui fait connaître la valeur de m, nous pouvons, au lieu de faire la substitution (11) dans (10), nous pouvons rechercher la relation qui existe entre u et v, et ensuite remplacer v dans (15) par son expression en fonction de u. De cette façon nous aurons le moyen de trouver m connaissant (15), c'est-à-dire connaissant μ.

On a

$$Y = T \,.\, u, \tag{11}$$

et d'autre part, d'après (2) et (14) :

$$D\frac{Y}{Y_0} = Z \qquad Z = \theta \,.\, v$$

on a

$$D\frac{Y}{Y_0} = \theta . v. \tag{16}$$

Nous allons éliminer Y entre (11) et (16) pour avoir la relation entre u et v.

De (11) on tire

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{T}{Y_0} \cdot u,$$

donc

$$D\frac{Y}{Y_0} = D\left(\frac{T}{Y_0} \cdot u\right);$$

en comparant avec (16), on a

$$D\left(\frac{T}{Y_0} \cdot u\right) = \theta . v. \tag{17}$$

D'ailleurs, la radicale de Y_0 étant φ_0, on a

$$Y_0 = T_0 . u_0 \tag{18}$$

avec

$$T_0 = c^{\int_{z_0}^{z} \varphi_0 dz},$$

$$u_0 = \overline{\mathfrak{L}}(X).$$

Donc (17) devient

$$D\left(\frac{T}{T_0} \cdot \frac{u}{u_0}\right) = \theta . v. \tag{19}$$

Mais de (14^{bis})

$$\theta = c^{\int_{z_0}^{z} \psi dz} = c^{\int_{z_0}^{z} (\varphi - \varphi_0) dz}$$

et de

$$T = c^{\int_{z_0}^{z} \varphi dz} \qquad T_0 = c^{\int_{z_0}^{z} \varphi_0 dz}$$

on tire

$$\theta = \frac{T}{T_0},$$

donc (19) devient

$$\frac{T}{T_0} v = D\left(\frac{T}{T_0} \cdot \frac{u}{u_0}\right) = \left(D\frac{T}{T_0}\right) \cdot \frac{u}{u_0} + \frac{T}{T_0}\left(D\frac{u}{u_0}\right),$$

mais

$$D\frac{T}{T_0} = (\varphi - \varphi_0)\frac{T}{T_0} = \psi \cdot \frac{T}{T_0},$$

donc

$$\frac{T}{T_0} v = \frac{T}{T_0}\left\{ \psi \cdot \frac{u}{u_0} + D\frac{u}{u_0} \right\}$$

et

$$v = \psi \cdot \frac{u}{u_0} + D\frac{u}{u_0}. \qquad (20)$$

202. Faisons la substitution (20) dans (15) :

$$(gD)\left(\psi\frac{u}{u_0} + D\frac{u}{u_0}\right) = \frac{1}{X}(hD)\left(\psi\frac{u}{u_0} + D\frac{u}{u_0}\right) + \overline{00}; \qquad (21)$$

comme l'opérateur (gD) est d'ordre μ, le premier nombre de (21) sera de la forme

$$(M_0 D^\mu + M_1 D^{\mu-1} + \cdots + M_\mu)u + (gD)D\frac{u}{u_0},$$

où

$$M_0 = \frac{\psi}{u_0},$$

tandis que M_1, M_2, ... M_μ ont des ordres d'infinitude (pour

$x = +\infty$) qui ne dépassent pas l'ordre de $M_0 = \frac{\psi}{u_0}$. Quant aux coefficients de $(gD)D\frac{u}{u_0}$, ils sont finis, donc d'ordre inférieur à celui de M_0.

Enfin le deuxième membre de (21) est de la forme

$$(N_0D^n + N_1D^{n-1} + \cdots + N_n)u + \overline{00},$$

où tous les coefficients N_0, N_1, ... N_n ont des ordres d'infinitude inférieurs à celui de $M_0 = \frac{\psi}{u_0}$.

Donc on voit que si l'on ne conserve dans le premier nombre de (21) que les coefficients de l'ordre le plus élevé, ce premier membre prendra la forme

$$(B_0D^\mu + B_1D^{\mu-1} + \cdots + B_\mu)u,$$

avec

$$B_0 \neq 0.$$

Donc μ est bien la multiplicité m de φ, et l'on a bien

$$\mu = m.$$

C. Q. F. D.

Démonstration du second point.

203. Dans le cas où $\psi = 0$, la substitution (20) se réduit à

$$v = D\frac{u}{u_0},$$

cette substitution faite dans

$$(gD)v = \frac{1}{X}(hD)v + \overline{00} \qquad (15)$$

donnera l'équation en u.

Les coefficients de l'ordre le plus élevé dans cette équation en u seront encore compris parmi ceux de

$$(g\mathrm{D})\mathrm{D}\frac{u}{u_0}.$$

Leur réunion formera un polynôme en D d'ordre $(\mu+1)$. Donc la multiplicité m de

$$\varphi = 0 + \varphi_0$$

dans (FD) est ici

$$m = \mu + 1.$$

C. Q. F. D.

QUATRIÈME PARTIE

Équations différentielles à paramètre variable. Problème fonctionnel.

CHAPITRE PREMIER

Relations asymptotiques entre solutions formelles et solutions exactes.

204. Dans la troisième partie de ce travail, nous avons étudié les solutions formelles

$$Y = T \cdot u \qquad (1)$$

satisfaisant à

$$(FD)Y = \overline{00} \cdot T. \qquad (2)$$

Dans cette quatrième et dernière partie, nous considérerons les fonctions y satisfaisant *exactement* à l'équation

$$(FD)y = 0, \qquad (3)$$

et non plus asymptotiquement comme dans (2).

Et nous montrerons que toute solution y de l'équation fonctionnelle (3) peut être développée asymptotiquement en utilisant ces solutions formelles étudiées dans la troisième partie.

On utilisera pour cela un système fondamental de solutions formelles

$$Y_1 \; Y_2 \ldots Y_n.$$

Ces solutions formelles pourront servir au développement de y, grâce au théorème suivant que nous démontrerons.

THÉORÈME.

205. Les n solutions formelles Y_1, Y_2, ... Y_n et les n fonctions y_1, y_2, ... y_n satisfaisant exactement à

$$(FD)y = 0,$$

et déterminées en outre par la condition que pour $z = z_0$ il y ait égalité entre ces y et les Y, ainsi qu'entre les $(n-1)$ premières dérivées de ces fonctions, ces fonctions sont liées par la relation

$$y_r = Y_r + \overline{00} \cdot T_r$$
$$r = (1, 2, \ldots n),$$

relation indéfiniment dérivable par rapport à z.

* * *

206. Ces n fonctions $y_1 y_2 \ldots y_n$ seront linéairement indépendantes, c'est-à-dire que leur Wronskien ne sera pas identiquement nul, puisque pour $z = z_0$ on aura

$$W(y_1 y_2 \ldots y_n) = W(Y_1 Y_2 \ldots Y_n) \neq 0.$$

* * *

207. Une fois assurée l'existence de ces n fonctions $y_1 y_2 \ldots y_n$ linéairement indépendantes dont nous connaissons les développements asymptotiques $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$, il sera facile d'établir le développement asymptotique de n'importe qu'elle solution y de

$$(FD)y = 0.$$

Veut-on en effet développer la solution y déterminée par la condition que pour $z = z_0$ l'on ait

$$y = b_0;\ \mathrm{D}y = b_1;\ \ldots\ \mathrm{D}^{n-1}y = b_{n-1},$$

où $b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$ sont des fonctions données de x et du numéro j?

On remarquera que toute solution y est de la forme

$$y = \mathrm{C}_1 y_1 + \mathrm{C}_2 y_2 + \cdots + \mathrm{C}_n y_n,$$

où $\mathrm{C}_1 \mathrm{C}_2 \ldots \mathrm{C}_n$ sont des quantités indépendantes de z qu'on pourra déterminer par les relations

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{C}_1 y_1 + \mathrm{C}_2 y_2 + \cdots + \mathrm{C}_n y_n]_{z_0} = b_0\\
&[\mathrm{C}_1 \mathrm{D}y_1 + \mathrm{C}_2 \mathrm{D}y_2 + \cdots + \mathrm{C}_n \mathrm{D}y_n]_{z_0} = b_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[\mathrm{C}_1 \mathrm{D}^{n-1}y_1 + \mathrm{C}_2 \mathrm{D}^{n-1}y_2 + \cdots + \mathrm{C}_n \mathrm{D}^{n-1}y_n]_{z_0} = b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Mais puisque pour $z = z_0$ les fonctions y et Y sont égales, ainsi que leurs $(n-1)$ premières dérivées, ces relations peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{C}_1 \mathrm{Y}_1 + \mathrm{C}_2 \mathrm{Y}_2 + \cdots + \mathrm{C}_n \mathrm{Y}_n]_{z_0} = b_0\\
&[\mathrm{C}_1 \mathrm{D}\mathrm{Y}_1 + \mathrm{C}_2 \mathrm{D}\mathrm{Y}_2 + \cdots + \mathrm{C}_n \mathrm{D}\mathrm{Y}_n]_{z_0} = b_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[\mathrm{C}_1 \mathrm{D}^{n-1}\mathrm{Y}_1 + \mathrm{C}_2 \mathrm{D}^{n-1}\mathrm{Y}_2 + \cdots + \mathrm{C}_n \mathrm{D}^{n-1}\mathrm{Y}_n]_{z_0} = b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Le déterminant de ces équations est $\mathrm{W}(\mathrm{Y}_1\, \mathrm{Y}_2 \ldots \mathrm{Y}_n)$ qui est $\neq \overline{00}$ parce que $\mathrm{Y}_1 \ldots \mathrm{Y}_n$ est un système fondamental.

Donc ces relations feront connaître $\mathrm{C}_1 \mathrm{C}_2 \ldots \mathrm{C}_n$, qui pourront être développés asymptotiquement, selon les valeurs données à $b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$. On aura ensuite y par

$$y = \mathrm{C}_1 y_1 + \mathrm{C}_2 y_2 + \cdots + \mathrm{C}_n y_n,$$

ou

$$y = \mathrm{C}_1(\mathrm{Y}_1 + \overline{00}\,\mathrm{T}_1) + \mathrm{C}_2(\mathrm{Y}_2 + \overline{00}\,\mathrm{T}_2) + \cdots + \mathrm{C}_n(\mathrm{Y}_n + \overline{00}\,\mathrm{T}_n),$$

et même

$$D^r y = C_1(D^r Y_1 + \overline{00}\, T_1) + C_2(D^r Y_2 + \overline{00}\, T_2) + \cdots + C_n(D^r Y_n + \overline{00}\, T_n)$$
$$(r = 0, 1, 2 \ldots \infty).$$

* * *

208. Voici sous quelle forme nous démontrerons le théorème du numéro 205.

Rappelons que l'on a

$$(FD)\, Y_r = \overline{00}\,.\, T_r \qquad (1)$$

et, d'autre part,

$$(FD) y_r = 0. \qquad (2)$$

Donc la fonction

$$Y_r - y_r = \tau$$

satisfait à

$$(FD)\tau = \overline{00}\,.\, T_r, \qquad (3)$$

et de plus pour $z = z_0$ l'on a

$$\tau = D\tau = \cdots = D^{n-1}\tau = 0. \qquad (4)$$

Le théorème du numéro 205 consiste à affirmer que les conditions (3) et (4) imposées à τ entraînent la relation indéfiniment dérivable

$$\tau = \overline{00}\,.\, T_r \qquad (5)$$

tout le long de $z_1 z_2$.

209. Nous démontrerons ce théorème sous la forme un peu plus générale suivante, que nous appellerons le grand théorème.

« Si l'expression $\tau(x, z, j)$ satisfait à

$$(FD)\tau = \overline{00}\,.\, T_r, \qquad (6)$$

où

$$FD = P_0 D^n + P_1 D^{n-1} + \cdots + P_n$$

et où $P_0 P_1 \ldots P_n$ sont de la classe $\overline{\mathfrak{L}}(x)$, et où T_r est un facteur principal de (FD).

Et si, de plus, au point de $z = z_0$ de l'intervalle $z_1 z_2$ l'on a

$$\tau = \overline{00}\, T_r ;\ D\tau = \overline{00}\, T_r ;\ \ldots\ D^{n-1}\tau = \overline{00}\, .\, T_r, \qquad (7)$$

alors ces dernières relations s'étendront à tout l'intervalle $z_1 z_2$.»

210. Il s'ensuit que l'on aura tout le long de $z_1 z_2$ la relation indéfiniment dérivable (5)

$$\tau = \overline{00}\, .\, T_r.$$

En effet, on pourra dériver indéfiniment par rapport à z la relation (6)

$$P_0 D^n \tau + P_1 D^{n-1}\tau + \cdots + P_n \tau = \overline{00}\, T_r.$$

Et les relations (7) qui auront lieu pour tout l'intervalle $z_1 z_2$ donneront, en tenant compte de ce que $P_0 \neq 0$,

$$D^n \tau = \overline{00}\, T_r ;\ D^{n+1}\tau = \overline{00}\, .\, T_r ;\ \text{etc.}$$

En un mot, on aura tout le long de $z_1 z_2$ la relation (5) indéfiniment dérivable par rapport à z,

$$\tau = \overline{00}\, .\, T_r.$$

* * *

211. Il nous reste toutefois à dire comment cet intervalle $z_1 z_2$ doit être délimité.

Nous supposons toujours remplies les conditions du numéro 147 relatives aux fonctions B_0 et au coefficient P_0.

Nous supposerons de plus que les radicales $\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n$ (égales ou inégales) sont numérotées dans un ordre tel que

$$\mathrm{R}\varphi_1 \geqslant \mathrm{R}\varphi_2 \geqslant \dots \geqslant \mathrm{R}\varphi_n \text{ (*)}, \qquad (8)$$

et nous supposerons que ces relations (8) se maintiennent tout le long de z_1z_2 ($z_1 < z_2$).

Si, par exemple, le signe de $\mathrm{R}(\varphi_1 - \varphi_2)$ changeait en un point z_2 de l'intervalle z_1z_3, il faudrait appliquer notre théorie séparément aux intervalles z_1z_2 (inclusivement) et z_2z_3 (inclusivement). Et il arrivera généralement que les développements asymptotiques trouvés pour y dans l'intervalle z_1z_2 et dans l'intervalle z_2z_3 ne seront pas le prolongement l'un de l'autre.

Remarquons que ce point z_2 n'est pas exclu de notre étude, puisque compris dans z_1z_2 et dans z_2z_3. Les seuls points exclus sont ceux signalés au numéro 147.

* * *

212. Dans le chapitre II qui suit, on fera la démonstration du grand théorème pour le cas de $\mathrm{T}_r = \mathrm{T}_1$, avec $z_0 = z_1$ ($z_1 < z_2$).

Et, par suite, aussi pour le cas de $\mathrm{T}_r = \mathrm{T}_n$ avec $z_0 = z_2$, puisque ce dernier cas se ramène au premier par le changement de z en $-z'$; et de z_1, z_2 respectivement en $-z_2'$ et $-z_1'$.

Le grand théorème sera démontré ensuite dans toute sa généralité au chapitre III.

NOTA BENE.

213. Il résulte de l'hypothèse faite relativement à P_0 au numéro 147, que $\dfrac{1}{\mathrm{P}_0}$ est de la forme $\overline{\mathfrak{T}(x)}$.

(*) $\mathrm{R}\varphi$ = partie réelle de φ.

Donc, au lieu de considérer l'opérateur (FD), nous pourrons considérer l'opérateur $\frac{1}{P_0}(FD)$ qui a comme le premier tous ses coefficients de la forme $\overline{\mathfrak{X}(x)}$, mais dans lequel le coefficient de D^n est l'unité.

En d'autres termes, nous pourrons supposer, sans diminuer la généralité, que

$$P_0 = 1,$$

et c'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

CHAPITRE II

Cas particulier du grand théorème

§ 1. *Énoncé.*

214. Nous avons à démontrer dans ce chapitre le théorème suivant :

Si l'expression $\tau(x, z, j)$ satisfait à la relation

$$(FD)\tau = \overline{00} \,.\, T_1, \tag{1}$$

où

$$(FD) = D^n + P_1 D^{n-1} + \cdots + P_n,$$

et où $P_1 P_2 \ldots P_n$ sont de la forme

$$\overline{\mathfrak{L}(x)},$$

et où T_1 est un facteur principal de (FD) dont la radicale φ_1 est telle que

$$R\varphi_1 \geqslant R\varphi_2 \geqslant \ldots \geqslant R\varphi_n, \tag{2}$$

et si, de plus, à l'extrémité $z = z_1$ de l'intervalle $z_1 z_2$, l'on a

$$\tau = \overline{00} \,.\, T_1 ; \; D\tau = \overline{00} \,.\, T_1 ; \; \ldots \; D^{n-1}\tau = \overline{00} \,.\, T_1, \tag{3}$$

alors ces dernières relations s'étendront à tout l'intervalle $z_1 z_2$ (*).

(*) Soit K la valeur de T_1 pour $z = z_1$. En posant $\tau = K \,.\, \tau'$ on sera ramené au cas où pour $z = z_1$ l'on a $T_1 = 1$. C'est pourquoi nous supposerons dans ce chapitre que pour $z = z_1$ l'on a $T_1 = 1$.

§ 2. *Abrégé de la démonstration.*

215. Pour faire cette démonstration, nous introduirons la notion de *système capital* de fonctions.

Nous dirons que le système des n fonctions

$$V_1, V_2, \dots V_n$$

forme un système capital pour l'opérateur (FD) si ces fonctions remplissent les trois conditions suivantes :

1° Elles sont indépendantes du numéro j ;

2° Le rapport

$$\frac{T_1 \cdot T_2 \dots T_n}{W(V_1, V_2, \dots V_n)} \qquad (3^{bis})$$

est dans la zone ;

3° Les n fonctions

$$v_1, v_2, \dots v_n$$

définies par

$$v_r = \frac{W_r}{W}(FD)V_r, \qquad (4)$$

où

$$W = W(V_1 V_2 \dots V_r \dots V_n) \qquad (5)$$

$$W_r = W(V_1 \dots V_{r-1} V_{r+1} \dots V_n)\ (*) \qquad (6)$$

ces n fonctions $v_1 v_2 \dots v_n$ restent bornées quand x tend vers $+\infty$, et cela dès que le numéro j, contenu éventuellement dans les coefficients de (FD), dépasse une certaine valeur j_0.

216. Nous construirons notre système capital en partant du système fondamental de solutions formelles :

$$Y_1(j), Y_2(j), \dots Y_n(j)$$

(*) W_r est un Wronskien d'ordre $(n-1)$ qui ne renferme pas la lettre V_r.

par les formules

$$V_1 = Y_1(j_1);\ V_2 = Y_2(j_2);\ \ldots\ V_n = Y_n(j_n),$$

où $j_1 j_2 \ldots j_n$ sont des nombres fixes, choisis suffisamment grands (*). (Voir n° 238.)

217. Cela posé, représentons par K la valeur de $(FD)\tau$; et par $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ les valeurs pour $z = z_1$ de τ, $D\tau, \ldots D^{n-1}\tau$.

Donc τ est solution de

$$(FD)\tau = K \tag{7}$$

et satisfait, pour $z = z_1$, aux conditions

$$\tau = b_0;\ D\tau = b_1;\ \ldots\ D^{n-1}\tau = b_{n-1}, \tag{8}$$

relations où, d'après les hypothèses (1) et (3) de l'énoncé, l'on a

$$K = \overline{00}\,.\,T_1 \tag{9}$$

$$b_0 = \overline{00};\ b_1 = \overline{\overline{00}};\ \ldots\ b_{n-1} = \overline{00}. \tag{10}$$

(Dans la formule (3) de l'énoncé, on donne $\overline{00}\,T_1$ au lieu de $\overline{00}$. Mais puisque l'on suppose en même temps que $z = z_1$, alors on à $T_1 = 1$, d'après la note du n° 214).

218. Cette fonction τ et ses dérivées d'ordre $1, 2, \ldots (n-1)$ pourront se représenter par

$$\left.\begin{aligned} \tau &= C_1 V_1 + \cdots + C_n V_n \\ D\tau &= C_1 DV_1 + \cdots + C_n DV_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D^{n-1}\tau &= C_1 D^{n-1}V_1 + \cdots + C_n D^{n-1}V_n \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

(*) Les rapports $\dfrac{V_r}{T_r}$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ seront, ainsi que leurs inverses, de la classe $\overline{\mathcal{P}(x)}$.

Il suffira, en effet, de donner aux fonctions C les valeurs qui résultent de la résolution de ce système, dont le déterminant est

$$W(V_1, V_2, \dots V_n) \neq 0.$$

219. Éliminons τ entre ces relations (11) et la relation (7)

$$(FD)\tau = K.$$

Nous obtenons pour déterminer les C un système différentiel linéaire

$$DC_r = (-1)^{n+r}\frac{W_r}{W}K + (-1)^{n+r+1}W_r\left\{\frac{v_1}{W_1}c_1 + \dots + \frac{v_n}{W_n}C_n\right\} \quad (12)$$
$$(r = 1, 2, \dots n).$$

(Voir n° 239.)

220. Que l'on peut écrire

$$C_r = c_r + (-1)^{n+r}\int_{z_1}^{z}\frac{W_r}{W}K\,dz + (-1)^{n+r+1} \quad (13)$$
$$\int_{z_1}^{z} W_r\left(\frac{v_1}{W_1}c_1 + \dots + \frac{v_n}{W_n}C_n\right)dz,$$

les c étant les valeurs que prennent les C pour $z = z_1$ (*).

En vertu de (8), ces valeurs c sont déterminées par les relations

$$D^s(c_1V_1 + \dots + c_nV_n)_{z_1} = b_s \quad (14)$$
$$\big(s = 0, 1, 2, \dots (n-1)\big).$$

221. Dans ces relations l'on voit immédiatement, parce que le déterminant de ce système d'équations en c est

$$W(V_1, V_2, \dots V_n) \neq 0,$$

(*) Les c sont indépendantes de z, donc $Dc = D^2c = \dots = 0$.

et parce que les deuxièmes membres $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ sont, en vertu de (10), de la classe $\overline{00}$, on voit immédiatement que les c déterminés par ces relations (14) sont $\overline{00}$

$$c_1 = \overline{00}\,;\; c_2 = \overline{00}\,;\; \ldots\, c_n = \overline{00}. \tag{15}$$

222. Il est facile de vérifier, en reprenant les calculs en sens inverses, que lorsque les C sont déterminés par les formules (13) et (14), la fonction

$$\tau = C_1 V_1 + \cdots + C_n V_n$$

satisfait bien aux relations (7) et (8).

* * *

223. Désignons par W_0 l'une des fonctions $W_1, W_2, \ldots W_n$, définies par la formule (6), pour laquelle on ait, pour x suffisamment grand ($x > x_0$) :

$$R\,\frac{DW_0}{W_0} \leqq R\,\frac{DW_r}{W_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots n). \tag{16}$$

Ces relations (16) ont pour conséquences :

224. 1° Que les fonctions

$$\left|\frac{W_r}{W_0}\right|$$

sont non décroissantes. (Voir n° 240.)

225. 2° Que

$$W_0 = T_2 \,.\, T_3 \ldots T_n \,.\, u_0, \tag{17}$$

le facteur secondaire u_0 étant, ainsi que son inverse, de la forme $\bar{z}$. (Voir n° 241.)

Comme on a

$$W_r = T_1 \dots T_{r-1} T_{r+1} \dots T_n \cdot u_r,$$

u_r étant, ainsi que son inverse, de la forme $\overline{\mathfrak{L}(x)}$ (*), il s'ensuivra que

$$\frac{W_r}{W_0} = \frac{T_1}{T_r} \cdot u, \tag{18}$$

u étant, ainsi que son inverse, de la classe $\overline{z}$.

* * *

226. Ces remarques faites, représentons par γ_s la fonction

$$\left.\begin{aligned} \gamma_s &= C_s \frac{W_0}{W_s} \\ &\qquad (s = 1, 2, \dots n). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Notre théorème sera démontré si nous prouvons que

$$\gamma_s = \overline{00} \qquad (s = 1, 2, \dots n).$$

Car on a, pour $r = 0, 1, 2 \dots (n-1)$, en vertu de (11),

$$\begin{aligned} D^r\tau &= \Sigma_s C_s \cdot D^r V_s \\ &= \Sigma_s C_s \cdot T_s \cdot \overline{z} \\ &= \Sigma_s \gamma_s \frac{W_s}{W_0} \cdot T_s \cdot \overline{z}, \end{aligned}$$

ou, par la formule (18),

$$D^r\tau = \Sigma_s \gamma_s \cdot T_1 \cdot \overline{z};$$

donc si

$$\gamma_s = \overline{00} \qquad (s = 1, 2, \dots n),$$

(*) C'est une conséquence de la note du numéro 216.

on aura, tout le long de $z_1 z_2$

$$D^r \tau = \overline{00} \,.\, T^1 \qquad (r = 0, 1, \ldots (n-1)),$$

ce qui est bien la relation qu'il faudrait démontrer.

227. Nous allons donc tâcher de prouver que

$$\gamma_s = \overline{00}? \qquad (s = 1, 2, \ldots n). \tag{20}$$

228. Pour transformer les relations (13) entre les C en des relations analogues entre les γ, nous ferons dans ces relations (13) la substitution (19)

$$C_s = \frac{W_s}{W_0} \gamma_s. \tag{19^{bis}}$$

On obtient ainsi pour caractériser les quantités γ les relations

$$\frac{W_r}{W_0} \gamma_r = c_r + (-1)^{n+r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz + (-1)^{n+r+1} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} (\gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n) dz \qquad (r = 1, 2, \ldots n). \tag{21}$$

229. Ces relations (21) permettent de calculer les fonctions γ par une méthode d'approximations successives.

On détermine les n suites

$$[\delta_1] = \delta_1^0, \delta_1^1, \delta_1^2, \delta_1^3, \ldots$$
$$[\delta_2] = \delta_2^0, \delta_2^1, \delta_2^2, \delta_2^3, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[\delta_n] = \delta_n^0, \delta_n^1, \delta_n^2, \delta_n^3, \ldots$$

pour les termes initiaux par

$$\delta_r^0 = \frac{W_0}{W_r} \left\{ c_r + (-1)^{n+r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz \right\} \qquad (22)$$

et, pour les termes suivants, par les formules de récurrence

$$\delta_r^{s+1} = (-1)^{n+r+1} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} (\delta_1^s v_1 + \cdots + \delta_n^s v_n) dz. \qquad (23)$$

230. Et l'on démontre :

1° Que dans les termes initiaux

$$\delta_r^0 = \frac{W_0}{W_r} c_r + (-1)^{n+r} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz$$

l'on a séparément

231.

$$\frac{W_0}{W_r} c_r = \overline{00}. \qquad (24)$$

(Voir n° 242.)

232.

$$\frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz = \overline{00}, \qquad (25)$$

(Voir n° 243.)

233. Donc

$$\delta_r^0 = \overline{00}. \qquad (26)$$

234. 2° On démontre que la série

$$\delta_r^0 + \delta_r^1 + \delta_r^2 + \cdots$$

est convergente, uniformément par rapport à z et x.

(Voir n° 244.)

Elle représente donc une fonction ψ_r.

235. 3° On démontre encore que, pour $j > j_0$,

$$\left.\begin{aligned} &\psi_r = \delta_r^0 + \cdots + \delta_r^{s-1} + \mathrm{R}_r^s \\ &\text{avec} \\ &\mathrm{R}_r^s = \frac{\overline{\lambda}\,.\,\overline{\mathrm{I}(xz)}}{x^{\mathrm{N}}}. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

(Voir n° 245.)

236. 4° On démontre enfin que

$$\psi_r = \gamma_r \qquad (28)$$

(Voir n° 246.)

* * *

237. Cela établi, la relation (27), où l'on remplace ψ_r par γ_r et où l'on fait $s = 1$, nous donnera, pour $j > j_0$:

$$\gamma_r = \delta_r^0 + \frac{\overline{\lambda}\,.\,\overline{\mathrm{I}(x, z)}}{x^{\mathrm{N}}}.$$

Donc, quel que soit N, on pourra trouver un nombre j_0 (donné au n° 235) tel que, pour tout $j > j_0$, l'on ait

$$\gamma_r - \delta_r^0 = \frac{\overline{\lambda}\,.\,\overline{\mathrm{I}(x, z)}}{x^{\mathrm{N}}}.$$

Cela veut dire que l'on aura

$$\gamma_r - \delta_r^0 = \overline{00}.$$

Mais par (26) on a déjà

$$\delta_r^0 = \overline{00}.$$

Donc, il reste :

$$\gamma_r = \overline{00},$$

ce qui est la relation (20) qu'il fallait établir.

§ 3. *Développement du numéro 216.*

238. Soit $Y_1(j)$, $Y_2(j)$, ... $Y_n(j)$ un système fondamental de solutions formelles de (FD).

Formons le produit

$$\left[\frac{W(Y_1 \dots Y_r \dots Y_n)}{Y_1 \dots Y_r \dots Y_n}\right] \cdot \left[\frac{Y_1 \dots Y_r \dots Y_n}{W(Y_1 \dots Y_r \dots Y_n)}\right] \cdot \left[\frac{(FD)Y_r}{Y_r}\right] = \pi.$$

Le premier facteur est de la forme

$$\overline{\mathfrak{L}(X)}.$$

Il en est de même du deuxième facteur, parce que le système $Y_1 Y_2 \dots Y_n$ est fondamental.

Donc chacun de ces deux facteurs est dans la zone $\bar{z}$.

Quant au troisième facteur, il est de la classe $\overline{00}$.

Donc pour tout le produit π, on a

$$\pi = \overline{00}.$$

Remarquons maintenant que ce produit π forme le quotient de deux polynômes en

$$\begin{matrix}
\frac{DY_1}{Y_1}, & \frac{D^2Y_1}{Y_1}, & \dots\dots & \frac{D^nY_1}{Y_1} \\
\frac{DY_2}{Y_2}, & \frac{D^2Y_2}{Y_2}, & \dots\dots & \frac{D^nY_2}{Y_2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{DY_n}{Y_n}, & \frac{D_2Y_n}{Y_n}, & \dots\dots & \frac{D^nY_n}{Y_n},
\end{matrix}$$

et que toutes ces fonctions sont pseudo-convergentes. Par conséquent, d'après la propriété des fonctions pseudo-convergentes énoncée au numéro 66, si l'on représente par $J_1(j)$, $J_2(j)$, ... $J_n(j)$ des numéros astreints seulement à tendre vers l'infini avec j, en posant

$$Y_r\big(J_r(j)\big) = Z_r(j), \tag{I}$$

on aura

$$\left[\frac{W(Z_1, \dots Z_r, \dots Z_n)}{Z_1 \dots Z_r \dots Z_n}\right] \cdot \left[\frac{Z_1 \dots Z_r \dots Z_n}{W(Z_1 \dots Z_r \dots Z_n)}\right] \cdot \left[\frac{(FD)Z_r}{Z_r}\right] = \pi + \overline{00} = \overline{00},$$

ou,

$$\frac{W(Z_1 \dots Z_r \dots Z_n)}{W(Z_1 \dots Z_r \dots Z_n)} \cdot (FD)Z_r = \overline{00}.$$

Par suite, on pourra trouver un nombre j_0 tel que, pour tout $j \geqq j_0$, on ait :

$$\frac{W(Z_1 \dots Z_r \dots Z_n)}{W(Z_1 \dots Z_r \dots Z_n)} \cdot (FD)Z_r = \overline{\lambda} \,.\, \overline{\overline{I(x, z)}}.$$

Donc, en particulier, en posant

$$Z_r(j_0) = V_r \qquad (r = 1, 2, \dots n), \tag{II}$$

on aura

$$\frac{W(V_1 \dots V_r \dots V_n)}{W(V_1 \dots V_r \dots V_n)} \cdot (FD)V_r = \overline{\lambda} \,.\, \overline{\overline{I(x, z)}}.$$

Remarquons d'ailleurs que dans la formule (II) on a, d'après (I) :

$$Z_r(j_0) = Y_r\big(J_r(j_0)\big),$$

donc en posant

$$J_r(j_0) = j_r, \tag{III}$$

on a

$$V_r = Y_r(j_r).$$

Conclusion :

On obtient un système capital $V_1, V_2, \ldots V_n$ par les formules

$$V_r = Y_r(j_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots n),$$

à condition de choisir pour $j_1, j_2, \ldots j_n$ des numéros fixes suffisamment grands (comme l'indique la formule III).

§ 4. *Développement du numéro 219.*

239. Les fonctions $C_1, C_2, \ldots C_n$ sont déterminées par les relations

$$\left.\begin{aligned} &C_1V_1 + \cdots + C_nV_n = \tau \\ &C_1DV_1 + \cdots + C_nDV_n = D\tau \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &C_1D^{n-1}V_1 + \cdots + C_nD^{n-1}V_n = D^{n-1}\tau, \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

τ étant une fonction qui satisfait à

$$(FD)\tau = K. \qquad \text{(II)}$$

Si l'on dérive chacune des équations (I) et qu'on en soustraie la suivante, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} &(DC_1).V_1 + \cdots + (DC_n).V_n = 0 \\ &(DC_1).DV_1 + \cdots + (DC_n).DV_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(DC_1).D^{n-2}V_1 + \cdots + (DC_n).D^{n-2}V_n = 0, \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

et

$$\left.\begin{aligned} &(DC_1).D^{n-1}V_1 + \cdots + (DC_n).D^{n-1}V_n \\ &+ C_1D^nV_1 + \cdots + C_n.D^nV_n = D^n\tau, \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

à cette équation (IV) ajoutons les équations (I) multipliées respectivement par

$$P_n, P_{n-1}, \ldots P_1,$$

nous obtenons

$$(DC_1) \cdot D^{n-1}V_1 + \cdots + (DC_n) \cdot D^{n-1}V_n$$
$$+ C_1 \cdot (FD)V_1 + \cdots + C_n \cdot (FD)V_n = (FD)\tau.$$

En vertu de (II), le deuxième membre est égal à K. Donc, en posant pour abréger

$$(FD)V_r = k_r,$$

on a

$$(DC_1) \cdot D^{n-1}V_1 + \cdots + (DC_n) \cdot D^{n-1}V_n = K - (k_1C_1 + \cdots + k_nC_n). \quad (V)$$

Les n quantités (DC_1), (DC_2), ... (DC_n) sont donc déterminées par les n équations du premier degré (III) et (V) :

$$(DC_1) \cdot V_1 + \cdots + (DC_n) \cdot V_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(DC_1) \cdot D^{n-2}V_1 + \cdots + (DC_n) \cdot D^{n-2}V_n = 0$$
$$(DC_1) \cdot D^{n-1}V_1 + \cdots + (DC_n) \cdot D^{n-1}V_n = K - (k_1C_1 + \cdots + k_nC_n).$$

En résolvant, on obtient :

$$DC_r = (-1)^{n+r} \frac{W_r}{W} \{ K - k_1C_1 - \cdots - k_nC_n \}, \quad (VI)$$

où W et W_r ont les significations données par les formules (5) et (6) du numéro 215.

Mais d'après la formule (4) du même numéro 215, on a

$$k_s = \frac{W}{W_s} \cdot v_s,$$

et notre formule (VI) devient :

$$DC_r = (-1)^{n+r} \frac{W_r}{W} K + (-1)^{n+r+1} W_r \left\{ \frac{v_1}{W_1} C_1 + \cdots \frac{v_n}{W_n} C_n \right\}.$$

C. Q. F. D.

§ 5. *Développement du numéro 224.*

240. Je dis que la relation

$$\mathrm{R}\frac{\mathrm{DW}_0}{\mathrm{W}_0} \leqq \mathrm{R}\frac{\mathrm{DW}_r}{\mathrm{W}_r} \text{ (*)} \qquad \text{(I)}$$

a pour conséquence que

$$\left|\frac{\mathrm{W}_r}{\mathrm{W}_0}\right|$$

est non décroissante quand z croît.

Posons, en effet,

$$\frac{\mathrm{W}_r}{\mathrm{W}_0} = f. \qquad \text{(II)}$$

La relation donnée (I) s'écrira

$$\mathrm{R}\frac{\mathrm{D}f}{f} \geqq 0,$$

ou

$$\mathrm{RD}\log f \geqq 0. \qquad \text{(III)}$$

Or, on

$$\log f = \log|f| + i\arg(f)$$
$$\mathrm{D}\log f = \mathrm{D}\log|f| + i\mathrm{D}\arg(f)$$
$$\mathrm{RD}\log f = \mathrm{D}\log|f|.$$

Donc (III) équivaut à

$$\mathrm{D}\log|f| \geqq 0. \qquad \text{(IV)}$$

Et l'on en conclut que $\log|f|$ et par suite $|f|$ ou, d'après (II), $\left|\frac{\mathrm{W}_r}{\mathrm{W}_0}\right|$ est non décroissante. C. Q. F. D.

(*) R signifie partie réelle. Par exemple $\mathrm{R}\left(2+3\sqrt{-1}\right)=2$.

§ 6. *Développement du numéro 225.*

241. Représentons par $\bar{\alpha}$ toute fonction qui est, ainsi que son inverse, de la classe $\overline{\mathcal{F}(x)}$.

On a

$$W_r = T_1 \dots T_r \dots T_n \cdot \bar{\alpha} \qquad (I)$$

et, en désignant par le chiffre 0 l'un des indices **1**, **2**, ..., n, choisi conformément au numéro **223**,

$$W_0 = T_1 \dots T_0 \dots T_n \cdot \bar{\alpha}. \qquad (II)$$

De (I) et (II) on déduit

$$\frac{W_r}{W_0} = \frac{T_0}{T_r} \cdot \bar{\alpha} = c^{\int_{z_1}^{z} (\varphi_0 - \varphi_r) dz} \cdot \bar{\alpha},$$

donc

$$\left| \frac{W_r}{W_0} \right| = c^{\int_{z_1}^{z} R(\varphi_0 - \varphi_r) dz} \cdot \bar{\alpha}. \qquad (III)$$

Mais, d'après le numéro **240** précédent, la fonction

$$\left| \frac{W_r}{W_0} \right|$$

est non décroissante. Il faudra donc que dans le deuxième membre de (III) on ait

$$R(\varphi_0 - \varphi_r) \geqq 0. \qquad (IV)$$

Rappelons les relations (2) du numéro 214

$$R\varphi_1 \geqq R\varphi_2 \geqq \dots \geqq R\varphi_n, \qquad (2)$$

comme la notation φ_0 désigne l'une des radicales $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$,

il faudra, pour satisfaire à la fois à IV et (2), que l'on ait

$$R\varphi_0 = R\varphi_1 \qquad (V)$$

(ce qui ne veut pas nécessairement dire que $\varphi_0 = \varphi_1$).

De (V) on déduit

$$\left| c^{\int_{z_1}^{z} \varphi_0 dz} \right| = \left| c^{\int_{z_1}^{z} \varphi_1 dz} \right|$$

ou

$$| T_0 | = | T_1 |. \qquad (VI)$$

Représentons par $\overline{\underline{\beta}}$ toute fonction qui est, ainsi que son inverse, dans la zone z.

On aura évidemment

$$\overline{\alpha} \doteq \overline{\beta},$$

et aussi, à cause de (VI),

$$T_1\overline{\alpha} \doteq T_0\overline{\beta},$$

ou

$$\frac{T_1}{T_0}\overline{\alpha} \doteq \overline{\beta}. \qquad (VII)$$

La relation (II) peut s'écrire

$$W_0 = (T_2 . T_3 \ldots T_0 \ldots T_n) . \frac{T_1}{T_0}\overline{\alpha},$$

ou, à cause de (VII),

$$W_0 = T_2 . T_3 \ldots T_n . \overline{\beta}.$$

C. Q. F. D.

§ 7. *Développement du numéro 231.*

242. Il nous faut montrer que

$$\frac{W_0}{W_r} c_r = \overline{00}?$$

On a, par (18),

$$\frac{W_0}{W_r} = \frac{T_r}{T_1}\bar{z}. \qquad (18)$$

Mais, à cause des relations (2), $\left|\frac{T_r}{T_1}\right|$ est non croissante. Donc

$$\left|\frac{T_r}{T_1}\right| \leqq \left|\frac{T_r}{T_1}\right|_{z_1} = 1,$$

et par suite

$$\frac{T_r}{T_1} = \bar{z},$$

donc (18) donne

$$\frac{W_0}{W_r} = \bar{z},$$

et alors, en vertu de la relation (15), d'après laquelle

$$c_r = \overline{00},$$

on aura enfin

$$\frac{W_0}{W_r} c_r = \overline{00}.$$

C. Q. F. D.

§ 8. *Développement du numéro 232.*

243.

$$\frac{W_0}{W_r}\int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz = \overline{00}\,?$$

On a

$$\int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz = \int_{z_1}^{z} \left(\frac{W_r}{W_0}\right) \cdot \left(\frac{W_0 \cdot T_1}{W}\right) \cdot \left(\frac{K}{T_1}\right) dz, \qquad (1)$$

mais,

$$W_0 \cdot T_1 = T_1 \cdot T_2 \ldots T_n \cdot \bar{z} \qquad (17)$$

et

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{T_1 \cdot T_2 \dots T_n} \cdot \bar{z}, \qquad (3^{bis})$$

donc

$$\frac{W_0 \cdot T_1}{W} = \bar{z}. \qquad (II)$$

D'autre part,

$$\frac{K}{T_1} = \overline{00}. \qquad (9)$$

Par (II) et (9), la relation (I) devient

$$\int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz = \int_{z_1}^{z} \left(\frac{W_r}{W_0}\right) \cdot \overline{00} \cdot dz. \qquad (III)$$

Mais, d'après le numéro 224, $\left|\frac{W_r}{W_0}\right|$ est non décroissante.

Donc on peut appliquer le théorème du numéro 54, d'après lequel on aura

$$\int_{z_1}^{z} \left(\frac{W_r}{W_0}\right) \cdot \overline{00} \cdot dz = \frac{W_r}{W_0} \cdot \overline{00}.$$

Donc (III) devient

$$\int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz = \frac{W_r}{W_0} \cdot \overline{00},$$

et enfin

$$\frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz = \overline{00}.$$

C. Q. F. D.

§ 9. *Développement du numéro 234.*

244. La suite

$$\delta_r^0,\ \delta_r^1,\ \delta_r^2,\ \delta_r^3,\ \dots$$

étant déterminée pour le terme initial par

$$\delta_r^0 = \frac{W_0}{W_r}\left\{ c_r + (-1)^{n+r}\int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz \right\} \qquad (22)$$

et pour les termes suivants par la formule de récurrence

$$\delta_r^{s+1} = (-1)^{n+r+1}\frac{W_0}{W_r}\int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0}(\delta_1^s v_1 + \dots + \delta_n^s v_n)dz, \qquad (23)$$

il s'agit de démontrer la convergence uniforme par rapport à z et à x de la série

$$\delta_r^0 + \delta_r^1 + \delta_r^2 + \delta_r^3 + \dots$$

D'après la définition du numéro 215, on pourra trouver un nombre fixe

$$M = \overline{I(xz)}, \qquad (I)$$

tel que l'on ait

$$v_1 = \bar{\lambda}\,.\,M\,;\ v_2 = \bar{\lambda}\,.\,M\,;\ \dots v_n = \bar{\lambda}\,.\,M,$$

la formule (23) donnera donc

$$\delta_r^{s+1} = \bar{\lambda}\cdot M\cdot\frac{W_0}{W_r}\int_{z_1}^{z}\left|\frac{W_r}{W_0}\right|(|\delta_1^s| + \dots + |\delta_n^s|)dz \qquad (II)$$

Mais (n° 224) $\left|\dfrac{W_r}{W_0}\right|$ est non décroissante, donc sa plus grande valeur dans $z_1 z$ est atteinte en z, et l'on a

$$\int_{z_1}^{z}\left|\frac{W_r}{W_0}\right|(|\delta_1^s| + \dots + |\delta_n^s|)dz = \bar{\lambda}\cdot\frac{W_r}{W_0}\int_{z_1}^{z}(|\delta_1^s| + \dots + |\delta_n^s|)dz,$$

et la formule (II) devient

$$\delta_r^{s+1} = \overline{\lambda} \,.\, \mathrm{M} \,.\, \int_{z_1}^{z} (|\delta_1^s| + \cdots + |\delta_n^s|) dz. \qquad \text{(III)}$$

Nous poserons

$$|\delta_1^s| + \cdots + |\delta_n^s| = \sigma^s. \qquad \text{(IV)}$$

On aura donc, par (III),

$$|\delta_r^{s+1}| \leqq \mathrm{M} \int_{z_1}^{z} \sigma^s dz. \qquad \text{(V)}$$

En écrivant cette formule pour $r = 1, 2, \ldots n$, et en ajoutant membre à membre les n relations ainsi obtenues, il vient

$$\sigma^{s+1} = \overline{\lambda} \,.\, n \,.\, \mathrm{M} \,.\, \int_{z_1}^{z} \sigma^s dz. \qquad \text{(VI)}$$

On a, par (IV),

$$\sigma^0 = |\delta_1^0| + \cdots + |\delta_n^0|,$$

donc, en vertu de (26), on voit que

$$\sigma^0 = \overline{00}.$$

Donc, quel que soit N, on pourra trouver un j_0 tel que pour $j > j_0$ l'on ait

$$\sigma^0 = \frac{\overline{\lambda} \,.\, \overline{\mathrm{I}(x, z)}}{x^{\mathrm{N}}}.$$

Nous représenterons par S_0 la fonction représentée par $\frac{1}{x^{\mathrm{N}}}$ dans le second membre de cette relation. On aura donc

$$\sigma^0 = \overline{\lambda} \mathrm{S}^0, \qquad \text{(VII)}$$

avec

$$\mathrm{S}^0 = \frac{\overline{\mathrm{I}(x, z)}}{x^{\mathrm{N}}}. \qquad \text{(VIII)}$$

A cause de (VI) et (VII), les quantités (positives)

$$\sigma^0, \sigma^1, \ldots \sigma^s, \ldots$$

seront respectivement plus petites que les quantités (positives)

$$S^0, S^1, \ldots S^s, \ldots$$

déterminées, à partir de S^0, par la formule de récurrence

$$S^{s+1} = n \,.\, M \,.\, \int_{z_1}^{z} S^s dz. \tag{IX}$$

Or, on a, par (VIII) et (IX),

$$S^0 = \frac{\overline{I(x, z)}}{x^N} = \overline{I(z)}$$

$$S^1 = n \,.\, M \,.\, \int_{z_1}^{z} S^0 dz = n \,.\, M \,.\, S^0 \cdot \frac{(z - z_1)}{1}$$

$$S^2 = n \,.\, M \,.\, \int_{z_1}^{z} S^1 dz = (n \,.\, M)^2 S^0 \int_{z_1}^{z} \frac{(z - z_1)}{1} dz$$

$$= (n \,.\, M)^2 \,.\, S^0 \frac{(z - z_1)^2}{1 \,.\, 2},$$

et en général

$$S^s = S^0 \frac{[n \,.\, M \,.\, (z - z_1)]^s}{\lfloor s},$$

donc, puisque

$$\sigma^s \leqq S^s,$$

on aura

$$\sigma^s = \overline{\lambda} \,.\, S^0 \frac{[n \,.\, M \,.\, (z - z_1)]^s}{\lfloor s}. \tag{X}$$

Or, on a (V)

$$\delta_r^{s+1} = \overline{\lambda} \,.\, M \,.\, \int_{z_1}^{z} \sigma^s dz,$$

donc, en remplaçant σ^s par la valeur (X),

$$\delta_r^{s+1} = \overline{\lambda} \,.\, S^0 \,.\, \frac{[n \,.\, M \,.\, (z - z_1)]^{s+1}}{n \,.\, \underline{\lfloor s+1}}, \qquad \text{(XI)}$$

donc, en posant

$$n \,.\, M \,.\, (z_2 - z_1) = \Omega, \qquad \text{(XII)}$$

on voit que les termes de la série

$$\delta_r^0 + \delta_r^1 + \delta_r^2 + \cdots + \delta_r^s + \cdots \qquad \text{(XIII)}$$

sont, en module, respectivement plus petits que les termes de la série

$$\frac{s^0}{n} \left\{ 1 + \frac{\Omega}{1} + \frac{\Omega^2}{1 \,.\, 2} + \cdots + \frac{\Omega^s}{\underline{\lfloor s}} + \cdots \right\} \qquad \text{(XIV)}$$

Or, cette série, dont les termes sont indépendants de z, converge uniformément par rapport à z et x.

C. Q. F. D.

§ 10. *Développement du numéro 235.*

245. Le reste R_r^s de la série (XIII) du paragraphe précédent est plus petit en module que le reste correspondant de la série (XIV). Or, ce dernier reste est lui-même inférieur à

$$\frac{S^0}{n} \cdot \frac{\Omega^s}{\underline{\lfloor s}} \cdot c^{\Omega},$$

où, d'après (VIII), on a, pour $j > j_0$,

$$S^0 = \frac{\overline{I(x, z)}}{x^N},$$

et où (XII)

$$\Omega = n \,.\, M \,.\, (z_2 - z_1) = \overline{I(x, z)}.$$

Donc, pour $j > j_0$, on a

$$R_r^s = \bar{\lambda} \cdot \overline{\frac{I(x, z)}{x^N}}.$$

C. Q. F. D.

§ 11. *Développement du numéro 236.*

246. Il nous faut démontrer que

$$\psi_r = \gamma_r ?$$

Nous rappellerons pour cela que les fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ sont caractérisées par les relations (21) :

$$\gamma_r = \delta_r^0 + (-1)^{n+r+1} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} (\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n) dz, \quad (21)$$

où,

$$\delta_r^0 = \frac{W_0}{W_r} \left\{ c_r + (-1)^{n+r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W} K dz \right\} \quad (22)$$

$$(r = 1, 2, \dots n).$$

Il nous faut donc montrer que les fonctions ψ_r satisfont à ces mêmes relations, c'est-à-dire que

$$\psi_r = \delta_r^0 + (-1)^{n+r+1} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} (\psi_1 v_1 + \dots + \psi_n v_n) dz ? \quad (I)$$

$$(r = 1, 2, \dots n)$$

δ_r^0 ayant la valeur donnée par (22).

Pour cela, posons

$$\delta_r^0 + \delta_r^1 + \dots + \delta_r^{s-1} = \psi_r^s, \quad (II)$$

donc

$$\psi_r^s = \sum_0^s \delta_r^s. \quad (II)$$

De la relation (23)

$$\delta_r^{s+1} = (-1)^{n+r+1} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} (\delta_1^s v_1 + \cdots + \delta_n^s v_n) dz,$$

on déduit

$$\sum_0^s \delta_r^{s+1} = (-1)^{n+r+1} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} \left(v_1 \sum_0^s \delta_1^s + \cdots + v_n \sum_0^s \delta_n^s \right) dz. \quad \text{(III)}$$

Le second membre est égal à

$$(-1)^{n+r+1} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} (v_1 \psi_1^s + \cdots + v_n \psi_n^s) dz.$$

Quant au premier membre de (III), on a

$$\sum_0^s \delta_r^{s+1} = \sum_1^{s+1} \delta_r^s = \sum_0^{s+1} \delta_r^s - \delta_r^0 = \psi_r^{s+1} - \delta_r^0.$$

Donc (III) devient

$$\psi_r^{s+1} - \delta_r^0 = (-1)^{n+r+1} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} (v_1 \psi_1^s + \cdots + v_n \psi_n^s) dz. \quad \text{(IV)}$$

Mais on a, en vertu des numéros 234 et 235

$$\psi_r^s = \sum_0^s \delta_r^s = \psi_r + \overline{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon \left(\frac{1}{s} \right)} \, \overline{1(z)}, \quad \text{(V)}$$

donc (IV) devient

$$\psi_r + \overline{\varepsilon \left(\frac{1}{s} \right)} = \delta_r^0 + (-1)^{n+r+1} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} (v_1 \psi_1 + \cdots + v_n \psi_n) dz$$

$$+ \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} \cdot \overline{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon \left(\frac{1}{s} \right)} \, \overline{1(z)} \cdot dz. \quad \text{(VI)}$$

Mais,

$$\int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} \cdot \bar{\lambda} \cdot \overbrace{\varepsilon\left(\frac{1}{s}\right)}^{\frown} \overline{I(z)} \cdot dz = \overline{\varepsilon\left(\frac{1}{s}\right)} \cdot \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} \cdot \bar{\lambda} \cdot dz,$$

et comme, d'après le numéro 224, $\left|\frac{W_r}{W_0}\right|$ est non décroissante, on a

$$\int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} \bar{\lambda}\, dz = \frac{W_r}{W_0} \int_{z_1}^{z_2} \lambda\, dz = \frac{W_r}{W_0} \bar{\lambda} \cdot \overline{I(xz)},$$

donc (VI) devient

$$\psi_r + \overline{\varepsilon\left(\frac{1}{s}\right)} = \delta_r^0 + (-1)^{n+r+1} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} (v_1\psi_1 + \cdots + v_n\psi_n) dz + \overline{\varepsilon\left(\frac{1}{s}\right)},$$

et en faisant tendre s vers l'infini, on trouve

$$\psi_r = \delta_r^0 + (-1)^{n+r+1} \frac{W_0}{W_r} \int_{z_1}^{z} \frac{W_r}{W_0} (v_1\psi_1 + \cdots + v_n\psi_n) dz,$$

ce qui est la formule (I) qu'il fallait établir.

CHAPITRE III.

Grand théorème.

§ 1. *Énoncé.*

247. Dans ce chapitre, nous devons établir dans toute sa généralité le théorème suivant :

Hypothèses :

A. Si la fonction $\tau(x,z,j)$ satisfait à la relation

$$(\mathrm{FD})\tau = \overline{00}\, k\mathrm{T}_r, \tag{1}$$

où

$$\mathrm{FD} = \mathrm{D}^n + \mathrm{P}_1\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + \mathrm{P}_n. \tag{2}$$

B. Et où $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \ldots \mathrm{P}_n$ sont des fonctions de la classe

$$\overline{\mathfrak{L}(x)}.$$

C. Où k est une fonction arbitraire de x, j, indépendante de z.

D. Et où enfin T_r est l'un des n facteurs principaux (égaux ou inégaux) $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2 \ldots \mathrm{T}_n$ de (F^1).

Éventualités :

E. Alors, suivant qu'au point z_0 de z_1z_2 on aura simultanément :

$$\tau = \overline{00}\,.\,k\mathrm{T}_r,\ \mathrm{D}\tau = \overline{00}\, k\mathrm{T}_r,\ \ldots\ \mathrm{D}^{n-1}\tau = \overline{00}\, k\mathrm{T}_r. \tag{3}$$

F. Ou que l'on n'aura pas toutes ces relations à la fois.

Thèses :

E'. Alors, dans l'éventualité (E), les relations (3) s'étendront à tout l'intervalle $z_1 z_2$.

F'. Dans l'éventualité (F), les relations (3) ne seront vérifiées simultanément pour aucun point de $z_1 z_2$.

Remarques :

248. Rappelons tout d'abord que pour

$$z = z_0,$$

on a

$$T_1 = T_2 = \cdots = T_r = \cdots = T_n = 1. \qquad (4)$$

* * *

249. Nous ferons remarquer ensuite que, en posant

$$\tau = k\tau',$$

on ramène le théorème au cas où $k = 1$. Nous ferons donc la démonstration en supposant

$$k = 1. \qquad (5)$$

§ 2. *Abrégé de la démonstration.*

250. Pour $n = 1$, la proposition résulte facilement du chapitre précédent. (Voir n° 270.)

251. Pour $n > 1$, on fera la démonstration en supposant la proposition établie pour les équations différentielles d'ordre $< n$.

252. Dans cette démonstration, T_r sera, non pas l'un quelconque des n facteurs principaux (égaux ou inégaux)

$$T_1, T_2, \ldots T_{n-1}, T_n,$$

mais seulement l'un quelconque des $(n-1)$ facteurs principaux

$$T_1, T_2, \ldots T_{n-1}.$$

Nous pouvons faire cette supposition sans diminuer la généralité de notre démonstration. (Voir n° 271.)

253. Nous supposerons enfin que z_0 coïncide avec l'extrémité z_1 de l'intervalle $z_1 z_2$ $(z_1 < z_2)$. Cela non plus n'altère pas la généralité de la démonstration. (Voir n° 272.)

* * *

254. Soit Y une solution formelle de (FD), possédant un facteur principal T_n, et construite de telle sorte que sa série génératrice soit de la forme

$$[Y] = T_n \left(s^{(0)} + \frac{s^{(1)}}{X} + \frac{s^{(2)}}{X^2} + \cdots \right), \tag{6}$$

où $|s^0|$ doit être une fonction de z qui reste supérieure à un nombre positif fixe quand z parcourt l'intervalle $z_1 z_2$.

(Voir n°s 273 à 279.)

De sorte que l'on aura

$$Y = T_n \cdot \overline{\mathfrak{L}(X)},$$

et même

$$D^t Y = T_n \cdot \overline{\mathfrak{L}(X)} \qquad (6^{bis})$$

$$(t = 0, 1, 2, \ldots \infty),$$

et aussi

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{T_n} \cdot \overline{\mathfrak{L}(X)}. \tag{6^{ter}}$$

255. Et soit y la solution de

$$(\mathrm{FD})y = 0, \tag{7}$$

astreinte à satisfaire, pour $z = z_2$, aux conditions

$$y = \mathrm{Y},\ \mathrm{D}y = \mathrm{DY},\ \ldots\ \mathrm{D}^{n-1}y = \mathrm{D}^{n-1}\mathrm{Y}. \tag{8}$$

256. De (7) et (8) on déduit, par application du chapitre précédent et des remarques faites aux numéros **212** et **210**, que, *dans tout l'intervalle* $z_1 z_2$, on a la relation indéfiniment dérivable

$$y = \mathrm{Y} + \overline{00}\,.\,\mathrm{T}_n. \tag{9}$$

De sorte que, à cause de (6^{bis}) et (6^{ter}), on aura, dans $\overline{z_1 z_2}$,

$$\mathrm{D}^t y = \mathrm{T}_n\,.\,\overline{\mathfrak{L}(\mathrm{X})} \qquad (t = 0, 1, 2 \ldots \infty) \tag{9^{bis}}$$

et

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\mathrm{T}_n} \cdot \overline{\mathfrak{L}(\mathrm{X})}. \tag{9^{ter}}$$

257. En remplaçant dans (1)

$$(\mathrm{FD})\tau = \overline{00}\,.\,\mathrm{T}_r$$

τ par

$$\tau = y \int w dz, \tag{10}$$

on obtient, en tenant compte de (7), une relation qui, après division par y, sera représentée par

$$(\mathrm{GD})w = \overline{00} \cdot \frac{\mathrm{T}_r}{y},$$

ou, puisque d'après (9^{ter}) $\dfrac{1}{y}$ est de la forme $\dfrac{1}{\mathrm{T}_n}\overline{\mathfrak{L}(x)}$,

$$(\mathrm{GD})w = \overline{00}\,\frac{\mathrm{T}_r}{\mathrm{T}_n}, \tag{11}$$

où

$$GD = D^{n-1} + Q_1 D^{n-2} + \cdots + Q_{n-1}. \qquad (12)$$

(Voir n° 280.)

258. Nous allons montrer que la fonction w et l'opérateur (GD) satisfont aux hypothèses A, B, C, D de l'énoncé du numéro 247, où l'on remplace

τ	par	w
FD	»	GD
n	»	$(n-1)$
$P_1, P_2, \ldots P_{n-1}, P_n$	»	$Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$
k	»	1
$T_1 \ldots T_r \ldots T_{n-1}, T_n$	»	$\frac{T_1}{T_n}, \ldots \frac{T_r}{T_n}, \ldots \frac{T_{n-1}}{T_n}$.

259. On voit déjà, par (11) et (12), que la fonction w et l'opérateur (GD) satisfont à l'hypothèse (A) (*mutati mutandi*).

260. L'hypothèse (B) est aussi satisfaite, c'est-à-dire que les coefficients $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$ sont de la forme $\overline{\mathcal{P}(x)}$.

(Voir n° 281.)

261. L'hypothèse (C) est satisfaite avec $k = 1$.

262. Les facteurs principaux de l'opérateur (GD) sont

$$\frac{T_1}{T_n}, \ldots \frac{T_r}{T_n}, \ldots \frac{T_{n-1}}{T_n}.$$

(Voir n^{os} 282 à 287.)

Et l'on voit que l'hypothèse (D) est aussi satisfaite (*mutati mutandi*).

263. Donc, comme nous l'annoncions au numéro **258**, toutes les hypothèses A, B, C, D de l'énoncé sont vérifiées par la fonction w et l'opérateur (GD). Comme cet opérateur est d'ordre $(n-1) < n$, nous pourrons appliquer à la fonction w la thèse E′ ou F′ selon que se présentera pour cette fonction w l'éventualité E ou F.

Mais cette éventualité, qui se présentera pour w, sera en général la même que celle qui se présentera pour τ. On peut voir en effet que :

264. 1° Si τ subit l'éventualité E, w subira aussi l'éventualité E (avec $[n-1]$ au lieu de n). (Voir n° 288.)

Et, par suite, puisque le théorème proposé est applicable à la fonction w, cette fonction w vérifiera la thèse E′ tout le long de $z_1 z_2$.

265. 2° Si, au contraire, τ subit l'éventualité (F), alors ou bien

$$\tau = y \,.\, \overline{\mathrm{I}(z)}\,\widehat{\ }\,\overline{\mathfrak{L}(\mathrm{X})} + \overline{00}\,\mathrm{T}_n\,(^*),$$

et le théorème est vérifié. (Voir n° 289.)

266. Ou bien

$$\tau + y \,.\, \overline{\mathrm{I}(z)}\,\widehat{\ }\,\overline{\mathfrak{L}(\mathrm{X})} + \overline{00}\,\mathrm{T}_r \qquad (r = 1, 2, \ldots n),$$

et alors w sera, comme τ, soumise à l'éventualité (F). (Voir n° 290.)

Et, par suite, cette fonction w vérifiera la thèse (F′) tout le long de $z_1 z_2$.

(*) On ne peut avoir $\tau = y \,.\, \overline{\mathrm{I}\,\mathrm{P}} + \overline{00} \,.\, \mathrm{T}_r$ avec $|\mathrm{T}_r| \neq |\mathrm{T}_n|$, car alors on aurait $|\mathrm{T}_r| > |\mathrm{T}_n|$ et, par suite, $\tau = \overline{00} \,.\, \mathrm{T}_r$, relation indéfiniment dérivable tout le long de $z_1 z_2$. Ce qui est en contradiction avec l'éventualité (F).

267. Dans le premier cas (cas du numéro 264), on déduit que τ vérifie la thèse (E′) en tout point de z_1z_2.

(Voir n° 291.)

268. Dans le deuxième cas (cas du numéro 266), on obtient que τ vérifie la thèse (F′) en tout point de z_1z_2.

(Voir n° 292.)

*
* *

269. Le théorème se trouve ainsi complètement démontré.

§ 3. *Développement du numéro 250.*

270. Pour une équation du premier ordre, c'est-à-dire pour $n = 1$, auquel cas on a $T_1 = T_n$, je dis que si l'éventualité (E) de l'énoncé (n° 247) se présente en un point z_0 de z_1z_2, la thèse (E′) sera vérifiée tout le long de z_1z_2.

En effet :

1° Si $z_0 = z_1$, la proposition résulte directement du théorème établi au chapitre précédent;

2° Si $z_0 = z_2$, la proposition résulte encore de ce théorème précédent, en tenant compte de la remarque du numéro 212 et de ce que $T_n = T_1$;

3° Si z_0 est un point intérieur à z_1z_2, on divisera l'intervalle z_1z_2 en deux intervalles partiels z_1z_0 et z_0z_2 pour chacun desquels le théorème sera vrai. Il sera donc vrai pour l'intervalle total.

Le théorème proposé étant ainsi établi en ce qui concerne l'éventualité (E), pour un point quelconque z_0 de z_1z_2, on en déduit immédiatement, par l'absurde, la proposition relative à l'éventualité (F).

§ 4. *Développement du numéro 252.*

271. T_r est l'une des fonctions $T_1 T_2 \dots T_n$. Elle appartient donc soit au groupe

$$T_1, T_2, \dots T_{n-1},$$

soit au groupe

$$T_2, T_3, \dots T_n.$$

Le deuxième cas se ramène au premier par le changement de z en $-z'$ et de $z_1 z_2$ respectivement en $-z_2'$ et $-z_1'$.

§ 5. *Développement du numéro 253.*

272. Tout point de l'intervalle $z_1 z_2$ doit nécessairement réaliser une et une seule des deux éventualités (E) ou (F).

Si l'on arrive à démontrer que celle de ces deux éventualités qui existe en l'extrémité z_1 doit exister tout le long de $z_1 z_2$, on en conclura immédiatement, par l'absurde, que celle de ces deux éventualités qui se trouve réalisée au point quelconque z_0 de l'intervalle $z_1 z_2$ est aussi celle qui existe en l'extrémité z_1, et par suite tout le long de $z_1 z_2$.

§ 6. *Développement du numéro 254.*

273. Il nous faut montrer que l'on peut construire une solution formelle Y de (FD) dont la génératrice soit de la forme

$$[Y] = T_n\left(s^{(0)} + \frac{s^{(1)}}{X} + \frac{s^{(2)}}{X^2} + \dots\right),$$

où $|s^{(0)}|$ reste supérieur à un nombre positif fixe quand z parcourt l'intervalle $z_1 z_2$.

274. Soit m la multiplicité du facteur principal T_n.

Conformément au numéro 174, dont nous conservons les notations, nous pourrons trouver m facteurs secondaires

$$u_1, u_2, \dots u_m$$

ayant des génératrices

$$[u_r] = s_r^{(0)} + \frac{s_r^{(1)}}{X} + \frac{s_r^{(2)}}{X} + \cdots \qquad (r = 1, 2, \dots m),$$

telles que le Wronskien

$$W(s_1^{(0)} s_2^{(0)} \dots s_m^{(0)})$$

reste, en module, supérieur à un nombre fixe dans tout l'intervalle $z_1 z_2$.

275. La fonction $s_1^{(0)}$ de z ne peut être identiquement nulle le long d'une portion quelconque de $z_1 z_2$. Car si cela était, les dérivées $Ds_1^{(0)}$, $D^2 s_1^{(0)}$ ..... seraient nulles aussi, et l'on aurait, par suite, dans cette portion :

$$W(s_1^{(0)} s_2^{(0)} \dots s_m^{(0)}) = 0,$$

ce que nous savons être impossible, par construction.

Comme $s_1^{(0)}$ est continue (parce que de la classe $\overline{a}$ et par conséquent pourvue d'une dérivée bornée), les zéros de $s_1^{(0)}$ seront en nombre limité dans l'intervalle $z_1 z_2$.

Représentons les par

$$Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots Z^{(p)}.$$

276. Faisons remarquer qu'aucun de ces points ne peut annuler à la fois

$$s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, s_3^{(0)}, \dots s_m^{(0)},$$

car si cela avait lieu, on aurait, pour cette valeur de z,

$$W(s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, \dots s_m^{(0)}) = 0,$$

ce qui, encore une fois, est impossible.

277. Parce que les fonctions

$$s_2^{(0)}, s_3^{(0)}, \dots s_n^{(0)}$$

ne s'annulent simultanément en aucun des points

$$Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots Z^{(p)},$$

il sera facile de trouver $(m-1)$ constantes $c_2, c_3, \dots c_m$, telles que la fonction

$$w = c_2 s_2^{(0)} + c_3 s_3^{(0)} + \dots + c_m s_m^{(0)}$$

ne s'annule en aucun de ces p points

$$Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots Z^{(p)}.$$

Cette fonction w est continue (puisque les fonctions $s_r^{(0)}$ le sont).

Par suite, on pourra construire un ensemble $\overline{c}$, formé de p intervalles dont chacun possède dans son *intérieur* l'un des points $Z^{(1)}Z^{(2)} \dots Z^{(p)}$, ensemble $\overline{e}$, dans lequel $|w|$ restera supérieur à un nombre positif fixe h.

278. Dans l'ensemble $\overline{c_1}$, formé en enlevant de l'intervalle $\overline{z_1 z_2}$ l'ensemble $\overline{c}$, et en adjoignant aux intervalles restants leurs points frontières, dans cet ensemble $\overline{c_1}$ la fonction $|s_1^{(0)}|$ ne s'annule pas, et, comme elle est continue, elle restera supérieure à un nombre positif fixe h_1.

Dans ce même ensemble $\overline{c_1}$, comme dans tout l'intervalle $z_1 z_2$, la fonction $|w|$ est bornée, donc inférieure à un nombre positif fixe g_1.

Donc, en désignant par c_1 un nombre fixe tel que

$$|c_1| \geqq \frac{h}{h_1} + g_1,$$

la fonction

$$s^{(0)} = c_1 s_1^{(0)} + w = c_1 s_1^{(0)} + c_2 s_2^{(0)} + \cdots + c_m s_m^{(0)}$$

sera, en module, supérieure à h dans tout l'intervalle $z_1 z_2$.

279. Donc, en prenant comme facteur secondaire

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots c_m u_m,$$

la solution formelle

$$\mathrm{Y} = \mathrm{T}_n \,.\, u$$

aura une génératrice de la forme

$$[\mathrm{Y}] = \mathrm{T}_n \left(s^{(0)} + \frac{s^{(1)}}{\mathrm{X}} + \frac{s^{(2)}}{\mathrm{X}^2} + \cdots \right),$$

dans laquelle le premier coefficient $s^{(0)}$ reste, en module, supérieur au nombre positif fixe h dans tout l'intervalle $z_1 z_2$.

§ 7. *Développement du numéro 257.*

280. En remplaçant τ par

$$\tau = v \,.\, y \qquad \text{(I)}$$

dans $(\mathrm{FD})\tau$, on obtient :

$$(\mathrm{FD})\tau = v \,.\, (\mathrm{FD})y + \frac{\mathrm{D}v}{1} (\mathrm{F'D})y + \frac{\mathrm{D}_2 v}{1.2} (\mathrm{F''D})y + \cdots$$
$$+ \frac{\mathrm{D}^n v}{\lfloor n} (\mathrm{F}^{(n)}\mathrm{D}y,$$

mais

$$(\mathrm{FD})y = 0, \tag{7}$$

et de plus

$$(\mathrm{F}^{(n)}\mathrm{D})y = \underline{\lfloor n} \,.\, y,$$

donc,

$$\frac{1}{y}(\mathrm{FD})\tau = \frac{\mathrm{D}v}{1} \cdot \frac{(\mathrm{F'D})y}{y} + \frac{\mathrm{D}^2 v}{1.2}\frac{(\mathrm{F''D})y}{y} + \cdots + \mathrm{D}^n v. \tag{II}$$

D'après (I), on a

$$\mathrm{D}v = \mathrm{D}\frac{\tau}{y},$$

et d'après (10) (du n° 257) :

$$\mathrm{D}\frac{\tau}{y} = w,$$

donc

$$\mathrm{D}v = w. \tag{III}$$

Si l'on fait cette substitution (III) dans (II), on a

$$\frac{1}{y}(\mathrm{FD})\tau = \frac{w}{1}\frac{(\mathrm{F'D})y}{y} + \frac{\mathrm{D}w}{1.2}\frac{(\mathrm{F''D})y}{y} + \cdots + \mathrm{D}^{n-1}w,$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{y}(\mathrm{FD})\tau = {} & w\mathrm{Q}_{n-1} + \mathrm{D}w \,.\, \mathrm{Q}_{n-2} + \cdots \\ & + \mathrm{D}^{n-r-1}w \,.\, \mathrm{Q}_r + \cdots + \mathrm{D}^{n-1}w\end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

avec

$$\mathrm{Q}_r = \frac{1}{\underline{\lfloor n - r}} \cdot \frac{(\mathrm{F}^{(n-r)}\mathrm{D})y}{y}. \tag{V}$$

§ 8. *Développement du numéro 260.*

281. Je dis que les coefficients $Q_1 Q_2 \dots Q_{n+1}$ de (GD) sont de la classe $\overline{\mathfrak{T}(x)}$.

En effet, d'après la formule (V) du § 7 qui précède, cela revient à montrer que

$$\frac{(F^{(s)}D)y}{y} = \overline{\mathfrak{T}(X)};$$

or,

$$\frac{(F^{(s)}D)y}{y} = \frac{(F^{(s)}D)y}{T_n} \cdot \frac{T_n}{y},$$

et, d'après (9ter),

$$\frac{T_n}{y} = \overline{\mathfrak{T}(X)}.$$

Donc, il suffit de démontrer que

$$\frac{(F^{(s)}D)y}{T_n} = \overline{\mathfrak{T}(X)}?$$

Mais cela résulte immédiatement de la formule (9bis), d'après laquelle

$$\frac{y}{T_n}, \quad \frac{Dy}{T_n}, \quad \frac{D^2y}{T_n}, \quad \text{etc.}$$

sont de la classe

$$\overline{\mathfrak{T}}(X).$$

La proposition est donc établie.

§ 9. *Développement du numéro 262.*

282. Il nous faut montrer que les facteurs principaux de (GD) sont

$$\frac{T_1}{T_n}, \frac{T_2}{T_n}, \dots \frac{T_{n-1}}{T_n}.$$

Soit

$$Y_1, Y_2, \dots Y_{n-1}, Y$$

un système fondamental de solutions formelles de (FD) aux facteurs principaux

$$T_1, T_2, \dots T_{n-1}, T_n.$$

Les facteurs principaux de

$$\Omega_1 = D\frac{Y_1}{Y}, \ \Omega_2 = D\frac{Y_2}{Y}, \ \dots \Omega_{n-1} = D\frac{Y_{n-1}}{Y} \qquad (I)$$

seront

$$\frac{T_1}{T_n}, \frac{T_2}{T_n}, \dots \frac{T_{n-1}}{T_n}.$$

La propriété proposée sera donc démontrée si nous prouvons que les génératrices de

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_{n-1}$$

sont les génératrices d'un système fondamental de solutions formelles de (GD).

283. Or, il est d'abord facile de voir que ces génératrices de $\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_{n+1}$ sont linéairement et uniformément indépendantes.

En effet,

$$W(\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_{n-1}) = W\left[D\left(\frac{Y_1}{Y}\right), \dots D\left(\frac{Y_{n-1}}{Y}\right)\right],$$

et par la formule (1) du numéro 181, on a

$$W\left[D\left(\frac{Y_1}{Y}\right), D\left(\frac{Y_2}{Y}\right), \dots D\left(\frac{Y_{n-1}}{Y}\right)\right] = \frac{1}{Y^n} \cdot W(YY_1Y_2 \dots Y_{n-1}).$$

Puisque $YY_1Y_2 \dots Y_{n-1}$ est un système fondamental pour (FD), le premier coefficient A^0 de la génératrice de

$$W(YY_1Y_2 \dots Y_{n-1})$$

est

$$A^0 \neq 0. \qquad \text{(II)}$$

D'autre part, en vertu de la formule (6) du numéro 254, le premier coefficient de la génératrice de $\frac{1}{Y}$ est

$$\frac{1}{s^{(0)}} \neq 0. \qquad \text{(III)}$$

Donc, le premier coefficient de la génératrice de

$$W(\Omega_1\Omega_2 \dots \Omega_{n-1})$$

sera

$$\frac{A^0}{(s^0)^n} \neq 0. \qquad \text{(IV)}$$

284. Il ne reste plus qu'à montrer que Ω_r a même génératrice qu'une solution formelle de (GD).

Mais, d'après (I),

$$\Omega_r = \frac{T_r}{T_n}\,\overline{\mathfrak{L}(X)},$$

donc il suffira de prouver que

$$(GD)\Omega_r = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n}? \qquad \text{(V)}$$

285. Pareillement au § 7 avant-précédent, si l'on remplace, dans (FD) Y_r, Y_r par

$$Y_r = V \cdot Y, \tag{VI}$$

on obtient

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{Y} \cdot (FD)Y_r = V \cdot \frac{(FD)Y}{Y} + \frac{DV}{1} \cdot \frac{(F'D)Y}{Y} \\ + \frac{D^2V}{1.2} \cdot \frac{(F''D)Y}{Y} + \cdots + D^nV. \end{aligned}\right\} \text{(VII)}$$

D'après (VI), on a

$$DV = D\left(\frac{Y_r}{Y}\right),$$

et d'après (I),

$$D\left(\frac{Y_r}{Y}\right) = \Omega_r,$$

donc

$$DV = \Omega_r. \tag{VIII}$$

Si l'on fait cette substitution (VIII) dans (VII), on a

$$\frac{1}{Y} \cdot (FD)Y_r = V \cdot \mathfrak{Q}_n + \Omega \cdot \mathfrak{Q}_{n-1} + (D\Omega) \cdot \mathfrak{Q}_{n-2} + \cdots + D^{n-1}\Omega, \tag{IX}$$

avec

$$\mathfrak{Q}_n = \frac{(FD)Y}{Y} = \overline{00} \tag{X}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q}_s = \frac{1}{\underline{|n-s}} \cdot \frac{(F^{(n-s)}D)Y}{Y} \\ s = 1, 2, \ldots (n-1). \end{aligned}\right\} \text{(XI)}$$

286. Montrons qu'entre ce coefficient $\mathfrak{Q}_s$ et le coefficient Q_s de (GD) donné par la formule (V) du § 7 avant-précédent existe la relation

$$\mathfrak{Q}_s = Q_s + \overline{00}? \tag{XII}$$

En comparant cette formule (V) du § 7 avec la formule (XI) du présent § 9, on voit que la relation (XII) est équivalente à

$$\frac{(F^{(s)}D)Y}{Y} = \frac{(F^{(s)}D)y}{y} + \overline{00}?$$
$$s = 1, 2, \ldots (n-1).$$

Donc nous devons démontrer que

$$\frac{(F^{(s)}D)Y}{T_n} \cdot \frac{T_n}{Y} = \frac{(F^{(s)}D)y}{T_n} \cdot \frac{T_n}{y} + \overline{00}?$$

Or, de la relation (9), indéfiniment dérivable :

$$\frac{Y}{T_n} = \frac{y}{T_n} + \overline{00},$$

on déduit

$$\frac{(F^{(s)}D)Y}{T_n} = \frac{(F^{(s)}D)y}{T_n} + \overline{00}.$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que

$$\frac{T_n}{Y} = \frac{T_n}{y} + \overline{00}?$$

Or, on a

$$\frac{T_n}{Y} - \frac{T_n}{y} = (y - Y) \cdot \frac{1}{Y} \cdot \frac{1}{y} \cdot T_n; \qquad \text{(XIII)}$$

et par (9)

$$y - Y = \overline{00} \cdot T_n,$$

par (6^{ter})

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{T_n} \cdot \overline{\mathfrak{P}(X)},$$

par (9^{ter})

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{T_n} \cdot \overline{\mathfrak{P}(X)}.$$

En faisant ces trois dernières substitutions dans le second membre de (XIII), on obtient enfin

$$\frac{T_n}{Y} - \frac{T_n}{y} = \overline{00}.$$

La relation (XII) se trouve donc établie :

$$\mathfrak{Q}_s = Q_s + \overline{00}. \qquad \text{(XII)}$$

287. En vertu de (X) et (XII), la relation (IX) devient

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{Y}(FD)Y_r = V\,.\,\overline{00} + \{Q_{n-1} + Q_{n-2}D + \cdots + D^{n-1}\}\,\Omega_r \\ + [\overline{00}\,\Omega_r + \overline{00}\,D\Omega_r + \cdots + \overline{00}\,D^{n-2}\Omega_r.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV)}$$

Mais puisque Y_r est solution formelle de (FD) au facteur principal T_r, on a

$$(FD)Y_r = \overline{00}\,.\,T_r.$$

D'autre part, par (6ter),

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{T_n}\cdot\overline{\mathfrak{P}(X)}.$$

Donc le premier membre de (XIV) est

$$\frac{1}{Y}(FD)Y_r = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n}. \qquad \text{(XV)}$$

D'après (VI), on a

$$V = \frac{Y_r}{Y} = \frac{T_r}{T_n}\,\overline{\mathfrak{P}(X)},$$

donc

$$V\,.\,\overline{00} = \overline{00}\cdot\frac{T_r}{T_n}. \qquad \text{(XVI)}$$

D'après la formule (12), on a

$$\{Q_{n-1} + Q_{n-2}D + \cdots + D^{n-1}\}\Omega_r = (GD)\Omega_r. \qquad \text{(XVII)}$$

Enfin, on a, d'après (I),

$$\Omega_r = D\left(\frac{Y_r}{Y}\right),$$

donc

$$\Omega_r = \frac{T_r}{T_n}\overline{\mathfrak{L}(X)},\ D\Omega_r = \frac{T_r}{T_n}\overline{\mathfrak{L}(X)},\ \text{etc.},$$

et par suite

$$[\overline{00}\,.\,\Omega_r + \overline{00}\,.\,D\Omega_r + \cdots + \overline{00}\,D^{n-2}\Omega_r] = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n}. \qquad \text{(XVIII)}$$

A cause de (XV), (XVI), (XVII), (XVIII), la relation (XIV) devient

$$(GD)\Omega_r = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n},$$

ce qui est la relation (V) qu'il fallait établir.

§ 10. *Développement du numéro 264.*

288. Je dis que si τ subit l'éventualité (E), w subira aussi l'éventualité (E) (avec $(n-1)$ au lieu de n).

Démonstration.

D'après (10), on a

$$w = D\left(\frac{\tau}{y}\right). \qquad \text{(I)}$$

Et puisque τ subit l'éventualité (E), on a en $z = z_1$:

$$\tau = \overline{00},\ D\tau = \overline{00},\ \ldots\ D^{n-1}\tau = \overline{00}. \qquad \text{(II)}$$

D'après (9bis) et (9ter),

$$\frac{1}{y} \quad y \quad \mathrm{D}y \quad \mathrm{D}^2 y \quad \ldots \qquad \text{(III)}$$

sont pour $z = z_1$ de la forme

$$\overline{\mathfrak{T}(\mathrm{X})}.$$

Donc on voit que les produits des premiers membres de (II) par les quantités (III) sont de la classe

$$\overline{00}.$$

Donc on a en $z = z_1$:

$$\mathrm{D}\left(\frac{\tau}{y}\right) = \overline{00}, \quad \mathrm{D}^2\left(\frac{\tau}{y}\right) = \overline{00}, \text{ etc.}$$

Et en vertu de I, il viendra pour $z = z_1$:

$$w = \overline{00}, \quad \mathrm{D}w = \overline{00}, \quad \ldots \mathrm{D}^{n-2} w = \overline{00}.$$

Ce qui montre que ω subit l'éventualité (E).

§ 11. *Développement relatif au numéro 265.*

289. Si

$$\tau = y + \overline{00} \,.\, \mathrm{T}_n,$$

le théorème proposé est vérifié avec l'éventualité (F) et la thèse (F′).

Car alors on a

$$(\mathrm{FD})\tau = \overline{00} \,.\, \mathrm{T}_r$$

avec

$$\mathrm{T}_r = \mathrm{T}_n,$$

et la relation

$$y = \overline{00} \,.\, \mathrm{T}_n$$

ne peut être vérifiée pour aucun point de $z_1 z_2$, parce que le premier coefficient de la génératrice de y ou de Y est, d'après (6) et (9), égal à

$$s^{(0)}$$

qui est différent de zéro en chaque point de $z_1 z_2$.

§ 12. *Développement du numéro 266.*

290. Je dis que si pour $z = z_1$ on n'a pas simultanément

$$\tau = \overline{00},\ \mathrm{D}\tau = \overline{00},\ \ldots\ \mathrm{D}^{n-1}\tau = \overline{00}, \tag{I}$$

et que si de plus

$$\tau \neq y \,.\, \overline{\overbrace{1(z)}\ \overbrace{\mathfrak{L}(\mathrm{X})}} + \overline{00} \,.\, \mathrm{T}_r, \tag{II}$$

je dis qu'alors on ne pourra avoir simultanément, pour $z = z_1$,

$$w = \overline{00},\ \mathrm{D}w = \overline{00},\ \ldots\ \mathrm{D}^{n-2}w = \overline{00}. \tag{III}$$

Car si les relations (III) étaient réalisées simultanément au point $z = z_1$, la fonction w subirait donc l'éventualité (E), et puisque le théorème proposé est applicable à w, cette fonction vérifierait la thèse (E'), c'est-à-dire que la relation (III) aurait lieu tout le long de $z_1 z_2$.

Mais alors la relation (10) :

$$\tau = y \int w dz,$$

qui peut s'écrire

$$\tau = y(b_1 + \textstyle\int_{z_1}^{z} w dz)$$

avec

$$b_1 = \left(\frac{\tau}{y}\right)_{z=z_1} = \overline{\overbrace{1(z)}\ \overbrace{\mathfrak{L}(\mathrm{X})}}, \tag{IV}$$

cette relation (IV) se réduirait à

$$\tau = y\left(b_1 + \int_{z_1}^{z} \overline{00}\cdot\frac{T_r}{T_n}\,dz\right), \qquad (V)$$

et comme $\left|\frac{T_r}{T_n}\right|$ est non décroissante, et que par conséquent on peut appliquer le théorème du numéro 54, la relation (V) donnerait

$$\tau = y\left(b_1 + \overline{00}\cdot\frac{T_r}{T_n}\right) = y\,.\,\overline{I(z)\ \mathfrak{L}(X)} + \overline{00}\,.\,T_r,$$

ce qui est impossible en vertu de l'hypothèse (II).

§ 13. *Développement du numéro 267.*

291. Si au point $z = z_1$ on a

$$\tau = \overline{00},\ D\tau = \overline{00},\ \ldots\ D^{n-1}\tau = \overline{00}, \qquad (I)$$

nous savons, par le numéro 264, que w vérifiera tout le long de z_1z_2 les relations

$$w = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n},\ Dw = \overline{00}\cdot\frac{T_r}{T_n},\ \ldots\ D^{n-2}w = \overline{00}\cdot\frac{T_r}{T_n}\cdot \qquad (II)$$

Je dis qu'en outre, tout le long de z_1z_2 on aura

$$\tau = \overline{00}\,T_r,\ D\tau = \overline{00}\,.\,T_r,\ \ldots\ D^{n-1}\tau = \overline{00}\,T_r\,? \qquad (III)$$

Démonstration.

On a, d'après (10),

$$w = D\left(\frac{\tau}{y}\right)\cdot$$

En substituant dans la première relation (II), on a

$$D\left(\frac{\tau}{y}\right) = \overline{00} \cdot \frac{T_r}{T_n},$$

ou

$$\frac{\tau}{y} - \left(\frac{\tau}{y}\right)_{z_1} = \int_{z_1}^{z} \overline{00} \cdot \frac{T_r}{T_n}\, dz,$$

mais $\left|\frac{T_r}{T_n}\right|$ est non décroissante; donc on peut appliquer le théorème du numéro 54, et l'on a

$$\frac{\tau}{y} - \left(\frac{\tau}{y}\right)_{z_1} = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n}. \qquad \text{(IV)}$$

Mais par l'hypothèse (I) on a

$$(\tau)_{z_1} = \overline{00},$$

et par (9ter)

$$\left(\frac{1}{y}\right)_{z_1} = \overline{\mathfrak{T}(X)},$$

donc

$$\left(\frac{\tau}{y}\right)_{z_1} = \overline{00},$$

et *a fortiori*, puisque

$$\left|\frac{T_r}{T_n}\right| \geqq \left|\frac{T_r}{T_n}\right|_{z_1} = 1,$$

a fortiori, on a

$$\left(\frac{\tau}{y}\right)_{z_1} = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n}.$$

Donc (IV) devient

$$\frac{\tau}{y} = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n}. \qquad \text{(V)}$$

En posant

$$\frac{\tau}{y} = v, \qquad \text{(VI)}$$

cette relation (V) s'écrit

$$v = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n}. \qquad \text{(VII)}$$

Mais de (VI) et (10) on déduit

$$w = Dv,$$

donc les relations (II) deviennent

$$Dv = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n},\quad D^2v = \overline{00}\cdot\frac{T_r}{T_n},\quad \ldots D^{n-1}v = \overline{00}\cdot\frac{T_r}{T_n},$$

en y adjoignant (VII), on a

$$v = \overline{00}\cdot\frac{T_r}{T_n},\quad Dv = \overline{00}\cdot\frac{T_r}{T_n},\quad \ldots D^{n-1}v = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n}. \qquad \text{(VIII)}$$

D'autre part, d'après (9bis), on a

$$y = T_n\cdot\overline{\mathfrak{L}(X)},$$

et même

$$D^s y = T_n\cdot\overline{\mathfrak{L}(X)} \qquad (s = 0, 1, 2\ldots).$$

On déduit de là que, pour $m = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$, on a :

$$\begin{aligned}
&(D^m v)\cdot y = \overline{00}\cdot T_r\\
&(D^{m-1}v)\cdot Dy = \overline{00}\cdot T_r\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&v\cdot D^m y = \overline{00}\cdot T_r,
\end{aligned}$$

donc

$$C_m^0\cdot(D^m v)\cdot y + C_m^1\cdot(D^{m-1}v)\cdot Dy + \cdots + C_m^m\cdot v\cdot D^m y = \overline{00}\cdot T_r$$

ou

$$D^m\{v\cdot y\} = \overline{00}\cdot T_r,$$

ou, puisque d'après (VI),

$$v = \frac{\tau}{y}$$

$$D^m\tau = \overline{00}\,.\,T_r$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots (n-1).$$

C. Q. F. D.

§ 14. *Développement du numéro 268.*

292. Si ω vérifie la condition (F′) en un point z, je dis que τ ne peut vérifier que la condition (F′) en ce point.

Car si τ satisfaisait à la condition (E′), on aurait en ce point

$$\tau = \overline{00}.T_r,\ D\tau = \overline{00}\,T_r,\ \ldots D^{n-1}\tau = \overline{00}\,.\,T_r. \qquad (I)$$

Et à cause de la relation (10)

$$w = D\left(\frac{\tau}{y}\right),$$

où, d'après (9^{bis}) et (9^{ter}), on a

$$D^s y = T_n \cdot \overline{\mathfrak{L}(X)}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{T_n} \cdot \overline{\mathfrak{L}(X)},$$

on déduirait de (I)

$$w = \overline{00}\,\frac{T_r}{T_n},\ Dw = \overline{00} \cdot \frac{T_r}{T_n},\ \ldots D^{n-2}w = \overline{00} \cdot \frac{T_r}{T_n}. \qquad (II)$$

Donc w satisferait, en ce point z, à la condition (E′), ce qui est absurde puisque w est supposée vérifier en ce point la condition (F′).

CHAPITRE IV.

ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE.

§ 1. *Énoncé du problème.*

293. Proposons-nous de trouver le développement asymptotique de la solution y de

$$(\mathrm{FD})y = \mathrm{K},$$

où

$$\mathrm{FD} = \mathrm{D}^n + \mathrm{P}_1\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + \mathrm{P}_n$$

avec

$$\mathrm{P}_r = \overline{\mathcal{P}(x)}$$

et où K est une somme de termes

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 + \cdots + \mathrm{K}_m,$$

dont chacun est de la forme

$$\mathrm{K}_r = \overline{\mathrm{I}(z)} \,.\, c^{\Phi_r(x)} \,.\, \overline{\mathcal{Q}(x)},$$

$\Phi_r(x)$ étant un polynôme en x, à coefficients de la classe $\overline{a}$.

Nous nous proposons de trouver le développement asymptotique de la solution y qui pour $z = z_0$ satisfait aux conditions

$$y = b^{(0)},\ \mathrm{D}y = b^{(1)},\ \ldots\ \mathrm{D}^{n-1}y = b^{(n-1)},$$

où $b^{(0)}$, $b^{(1)}$, ... $b^{(n-1)}$ sont des fonctions données, indépendantes de z.

§ 2. *Solution.*

294. Soit y_0 la fonction satisfaisant à l'équation sans second membre

$$(\mathrm{FD})y_0 = 0,$$

et à la condition que pour $z = z_0$ l'on ait

$$y_0 = b^{(0)},\ \mathrm{D}y_0 = b^{(1)},\ \ldots\ \mathrm{D}^{n-1}y_0 = b^{(n-1)}.$$

Et, pour $r = 1, 2, \ldots. m$, déterminons la fonction y_r par l'équation

$$(\mathrm{FD})y_r = \mathrm{K}_r$$

jointe à la condition que pour $z = z_0$ l'on ait

$$y_r = \mathrm{D}y_r = \cdots = \mathrm{D}^{n-1}y_r = 0.$$

295. Alors la fonction

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

satisfera à l'équation

$$(\mathrm{FD})y = 0 + \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 + \cdots + \mathrm{K}_m = \mathrm{K}$$

et à la condition que pour $z = z_0$ l'on ait

$$y = b^{(0)},\ \mathrm{D}y = b^{(1)},\ \ldots\ \mathrm{D}^{n-1}y = b^{(n-1)}.$$

Ce sera donc bien la fonction qu'il s'agit de développer asymptotiquement.

296. Et l'on voit que tout revient à développer séparément chacune des fonctions

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots y_m.$$

Le développement de la fonction y_0 a fait l'objet des recherches des chapitres précédents. Cherchons donc le développement d'une fonction y_r.

* * *

297. Nous sommes ainsi amenés au problème suivant :

Chercher le développement asymptotique de la solution y de

$$(\mathrm{FD})y = \mathrm{K},$$

où

$$\mathrm{FD} = \mathrm{D}^n + \mathrm{P}_1\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + \mathrm{P}_n,$$

avec

$$\mathrm{P}_r = \overline{\mathfrak{L}(x)},$$

et où

$$\mathrm{K} = \overline{1(z)} \cdot c^{\Phi(x)} \cdot \overline{\mathfrak{L}(x)},$$

($\Phi(x)$ étant un polynôme en x à coefficients de la classe $\overline{a}$).

Solution qui, pour $z = z_0$, doit satisfaire à

$$y = \mathrm{D}y = \cdots = \mathrm{D}^{n-1}y = 0.$$

298. Remarquons que, à cause de ces dernières relations et à cause de l'équation

$$\mathrm{D}^n y + \mathrm{P}_1\mathrm{D}^{n-1}y + \cdots + \mathrm{P}_n y = \mathrm{K},$$

on aura, pour $z = z_0$,

$$\mathrm{D}^n y = (\mathrm{K})_{z_0}.$$

Cette remarque faite, posons

$$\frac{\mathrm{DK}}{\mathrm{K}} = k.$$

On voit facilement que

$$k = \overline{\mathfrak{L}(x)}.$$

La fonction y devant satisfaire à

$$(\mathrm{FD})y = \mathrm{K}$$

devra aussi satisfaire à

$$(\mathrm{D} - k)(\mathrm{FD})y = (\mathrm{D} - k)\mathrm{K},$$

mais le deuxième membre est nul, parce que

$$k = \frac{\mathrm{DK}}{\mathrm{K}}.$$

Donc la fonction y doit satisfaire à l'équation d'ordre $(n+1)$ *sans second membre*

$$(\mathrm{D} - k)(\mathrm{FD})y = 0$$

et à la condition que pour $z = z_0$ l'on ait

$$y = \mathrm{D}y = \cdots = \mathrm{D}^{n-1}y = 0,$$

et

$$\mathrm{D}^n y = (\mathrm{K})_{z_0}.$$

Comme les coefficients de l'opérateur polynôme en D

$$(\mathrm{D} - k)(\mathrm{FD})$$

sont de la forme

$$\overline{\mathfrak{P}(x)},$$

on voit que nous sommes de nouveau ramenés au problème résolu dans les chapitres précédents.

CHAPITRE V.

Variation de l'argument de x.

299. Nous avons supposé jusqu'à présent que x tend vers l'infini par valeurs réelles positives.

Dans le cas où l'on voudrait faire tendre x vers l'infini avec un argument w_1 fixe, différent de zéro, on poserait

$$x = e^{w_1 i} x',$$

et l'on aurait à faire tendre x' vers l'infini par valeurs positives, ce qui nous ramènerait au cas que nous avons étudié.

300. Qu'arrivera-t-il de nos développements quand on remplacera l'argument de x par un autre?

Supposons que pour une valeur w_0 de l'argument de x, les radicales

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$$

soient numérotées de telle sorte que

$$\mathrm{R}\varphi_1 \geqq \mathrm{R}\varphi_2 \geqq \ldots \geqq \mathrm{R}\varphi_n. \qquad (\mathrm{I})$$

Soit y_r une solution développable asymptotiquement avec la radicale φ_r. Quand w s'éloignera de w_0, tant que les coefficients $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \ldots \mathrm{P}_n$ de (FD) conserveront les mêmes développements asymptotiques, et tant que l'on continuera à avoir les relations

$$\mathrm{R}\varphi_1 \geqq \mathrm{R}\varphi_2 \geqq \ldots \geqq \mathrm{R}\varphi_r \geqq \mathrm{R}\varphi_s \qquad (\mathrm{II})$$
$$(s = r+1, r+2, \ldots n),$$

la fonction y_r conservera le même développement asympto-

tique (sauf que w aura passé, par un chemin continu, de sa valeur initiale w_0 à sa valeur finale).

Mais si l'on atteint une valeur w_1 de w, au delà de laquelle les relations (II) n'ont plus lieu, alors il arrivera généralement que, dès que w dépassera w_1 (si peu que ce soit), la fonction y_r ne sera plus représentée par le même développement asymptotique qu'en deçà de w_1. Il y aura, en passant par w_1, un changement brusque dans la forme de ce développement.

Note relative à l'emploi du calcul asymptotique dans l'étude de la convergence.

Conformément à ce que nous avons annoncé dans l'introduction, nous allons montrer qu'on ne change pas l'état de convergence ou de divergence d'une série

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} Y(x) \qquad (1)$$

dans laquelle chaque terme $Y(x)$ est développable asymptotiquement sous la forme

$$Y(x) = T(x)\left\{1 + \frac{A_1}{x^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{x^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{\overline{B}}{x^{\alpha_r}}\right\} \qquad (2)$$

où $A_1 A_2 \ldots A_{r-1}$ sont des constantes,
où $\overline{B}$ est une fonction qui reste bornée quand x tend vers $+\infty$ et où les exposants $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{r-1} \alpha_r$ sont positifs et vont en croissant de façon à atteindre une valeur α_r plus grande que l'unité

$$\alpha_r > 1, \qquad (3)$$

nous allons montrer qu'on n'altère pas la convergence ou la divergence de la série (1) quand on remplace chacun de ses termes $Y(x)$ par le premier terme $T(x)$ de son développement (2).

En un mot, nous allons montrer que (1) est équiconvergente à

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} T(x). \qquad (4)$$

* * *

Rappelons d'abord que, d'après un théorème d'Abel, la convergence de la série

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} u(x) \tag{5}$$

ne sera pas altérée si l'on multiplie ses termes respectivement par les termes de la suite

$$v(1),\ v(2),\ \ldots v(x),\ \ldots \tag{6}$$

à condition que cette suite soit à variation bornée, c'est-à-dire que la série

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} |\Delta v(x)| \tag{7}$$

convergente (*) (**).

Remarquons qu'en vertu de cette condition (7) la série

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \Delta v(x)$$

sera (absolument) convergente. Donc la fonction

$$v(x) = v(1) + \{\Delta v(1) + \Delta v(2) + \Delta v(3) + \cdots + \Delta v(x-1)\}$$

tendra vers une limite finie et unique pour $x = +\infty$.

Je dis que si cette limite n'est pas nulle, donc si

$$v(+\infty) \neq 0, \tag{8}$$

je dis qu'alors les deux séries

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} u(x) \tag{5}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} u(x) \,.\, v(x) \tag{9}$$

seront équiconvergentes.

(*) Jordan. *Cours d'analyse*, 2e édition, t. I, p. 286, n° 300.

(**) $\Delta v(x) = v(x+1) - v(x)$.

Nous savons déjà, par le théorème d'Abel, que la convergence de la série (5) entraîne la convergence de la série (9). Il reste à montrer que, réciproquement, la convergence de (9) entraîne la convergence de (5).

Pour cela posons

$$u(x) \cdot v(x) = w(x),$$

la série (9) s'écrit

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} w(x), \tag{9^{bis}}$$

et la série (5) devient

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} w(x) \cdot \frac{1}{v(x)}. \tag{5^{bis}}$$

La propriété à démontrer, c'est-à-dire la convergence de (5^{bis}), résultera de la convergence de (9^{bis}) encore par le même théorème d'Abel, si nous parvenons à prouver que la suite

$$\frac{1}{v(1)}, \quad \frac{1}{v(2)}, \quad \frac{1}{v(3)}, \quad \ldots \frac{1}{v(x)} \ldots$$

est à variation bornée, c'est-à-dire que la série

$$\sum^{x=\infty} \left| \Delta \frac{1}{v(x)} \right| \tag{10}$$

est convergente.

Or, on a

$$\Delta \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{v(x+1)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - v(x+1)}{v(x) \cdot v(x+1)}$$
$$= - \frac{\Delta v(x)}{v(x) \cdot v(x+1)}.$$

Et puisqu'en vertu de (8) la fonction $\frac{1}{v(x)}$, et par suite aussi $\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(x+1)}$, tend vers une limite finie et reste donc en

module inférieure à une nombre fixe (A) :

$$\left|\frac{1}{v(x).v(x+1)}\right| < A, \qquad (11)$$

il en résulte que la convergence de

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left|\Delta\frac{1}{v(x)}\right| = \sum_{x=1}^{x=\infty}\left|\frac{\Delta v(x)}{v(x).v(x+1)}\right| < A.\sum_{x=1}^{x=\infty}|\Delta v(x)|$$

sera une conséquence de la convergence de (7).

C. Q. F. D.

* * *

Cela posé, revenons aux séries (1) et (4). Les termes de la série (1) se déduisent des termes de la série (4) par la formule (2), c'est-à-dire en multipliant chaque terme $T(x)$ par

$$v(x) = 1 + \frac{A_1}{x^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{x^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{A_{r-1}}{x^{\alpha_{r-1}}} + \frac{\overline{B}}{x^{\alpha_r}}, \qquad (12)$$

ces fonctions $v(x)$ ont pour $x = +\infty$ la limite

$$v(+\infty) = 1 \neq 0.$$

Il nous suffira donc, d'après ce qui précède, pour établir l'équiconvergence des séries (1) et (4), de montrer que la suite

$$v(1),\ v(2),\ \ldots v(x)\ldots$$

est à variation bornée, c'est-à-dire que la série

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}|\Delta v(x)| \qquad (13)$$

est convergente.

Or, on a, d'après (12),

$$\Sigma\Delta v(x) = A_1\Sigma\Delta\frac{1}{x^{\alpha_1}} + A_2\Sigma\Delta\frac{1}{x^{\alpha_2}} + \cdots + A_{r-1}\Sigma\Delta\frac{1}{x^{\alpha_{r-1}}} + \Sigma\Delta\frac{\overline{B}}{x^{\alpha_r}},$$

donc

$$\left.\begin{aligned}\Sigma|\Delta v(x)| \gtrless |A_1|\,.\,\Sigma\left|\Delta\frac{1}{x^{\alpha_1}}\right| + \cdots + |A_{r-1}|\,.\,\Sigma\left|\Delta\frac{1}{x^{\alpha_{r-1}}}\right| \\ + \Sigma\left|\Delta\frac{\overline{B}}{x^{\alpha_r}}\right|.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Il nous suffira donc, pour montrer la convergence de (13), d'établir la convergence des séries

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{x=1}^{x=\infty}\left|\Delta\frac{1}{x^{\alpha}}\right|, \\ &\text{où} \\ &\alpha > 0,\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

et

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{x=1}^{x=\infty}\left|\Delta\frac{\overline{B}}{x^{\alpha_r}}\right|, \\ &\text{où} \\ &\alpha_r > 1.\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

La convergence de (15) résulte de ce que, la fonction $\frac{1}{x^{\alpha}}$ étant décroissante, on a

$$\left|\Delta\frac{1}{x^{\alpha}}\right| = -\Delta\frac{1}{x^{\alpha}},$$

donc

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left|\Delta\frac{1}{x^{\alpha}}\right| = -\sum_{x=1}^{x=\infty}\Delta\frac{1}{x^{\alpha}} = -\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)_1^{\infty} = 1.$$

La convergence de (16) résulte de ce que, en désignant par C un nombre fixe supérieur au module de $\overline{B}$, on a

$$\left| \Delta \frac{\overline{B}}{x^{\alpha_r}} \right| \leq \frac{2C}{x^{\alpha_r}},$$

donc

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \left| \Delta \frac{\overline{B}}{x^{\alpha_r}} \right| \leq 2C \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{\alpha_r}},$$

la dernière série $\Sigma \frac{1}{x^{\alpha_r}}$ est convergente parce que $\alpha_r > 1$, donc, *a fortiori*, (16) est convergente.

C. Q. F. D.

TABLE DES DÉFINITIONS ET NOTATIONS

	Nos	Pages
$\overline{n}$ ensemble des nombres entiers	1	15
$\overline{\theta}$ » » entre 0 et 1.	1	16
$\overline{\lambda}$ » » dont le module est $\overline{\theta}$	1	16
$\overline{\mathrm{I}(z_1 z_2)}$ classe des fonctions indépendantes de z_1, z_2	1	16
$\overline{\varepsilon(t)}$ » » tendant vers 0 avec t	1	16
$\frown$ intersection ou multiplication logique des classes.	4	16
$\smile$ réunion ou addition logique des classes.	5	16
$\overline{\cdot\cdot}$ négation de la classe	6	17
$+$ renfermé dans	15	20
$+\!+$ renferme et est renfermé dans	17	20
$\overset{\prime}{_}$ n'importe quelle fonction de la classe.	19	21
$\overset{\backprime}{_}$ une certaine fonction de la classe.	19	21
$\overline{00}$ base	31	25
$\overline{00}$ classe asymptotiquement nulle	45	31
$\overline{z}$ = zone. Classe telle que $\overset{\prime}{z} \cdot \overline{00} = \overset{\backprime}{00}$	32	25
Pseudo-convergente (Fonction)	64	41
$\overline{a}$ classe de fonctions $\overline{\mathrm{I}(x,j)}$ dont chaque dérivée $\mathrm{D}^0, \mathrm{D}^1, \mathrm{D}^2, \ldots$ est bornée	70bis	44
$\overline{\mathcal{P}(x)}$ classe $x^{\overline{n}\frown\overline{1}}\left(\overline{a}+\overline{a}\frac{1}{x}+\cdots+\overline{a}\frac{1}{x^i}\right)+\overline{00}$	70 à 70quinte	44
Génératrice (série)	70quinte	45
Facteur principal	107-109	67
Facteur secondaire	107	67
Solution formelle de (FD)	107	67
Radicale	108	68
Multiplicité d'une radicale ou d'un facteur principal.	148	90
$\mathrm{W}(\gamma_1 \ldots \gamma_\nu)$ = Wronskien	162	99
Génératrices linéairement indépendantes.	162	99
Génératrices linéairement et uniformément indépendantes.	163	100
Système fondamental de solutions formelles	164	100
Système capital	215	137

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION . . . . . 1 à 12

PREMIÈRE PARTIE

Calcul des classes et calcul asymptotique.

	Numéros.	Pages.
CHAPITRE PREMIER. — Calcul des classes de fonctions.		
§ 1. Opérations logiques	1-7	15
§ 2. Opérations mathématiques sur les classes . . .	8-14	18
§ 3. Équations aux classes	15-23	20
§ 4. Emploi des classes	24-30	23
CHAPITRE II. — Congruences généralisées	31-38	25
CHAPITRE III. — Calcul asymptotique.		
§ 1. Définitions	39-49	28
§ 2. Intégration	50-63	34
§ 3. Fonctions pseudo-convergentes	64-70	41

DEUXIÈME PARTIE

Irrationnelles algébriques.

CHAPITRE PREMIER. — Problème formel.		
§ 1. Énoncé du problème	71	47
§ 2. Abrégé de la théorie	72-81	48
§§ 3-6. Développements de la théorie	82-100	51
CHAPITRE II. — Problème fonctionnel.	101-104	65

TROISIÈME PARTIE

Équations différentielles. — Problème formel.

	Numéros.	Pages.
CHAPITRE PREMIER. — Énoncé du problème	105-110	67
CHAPITRE II. — Calcul des radicales.		
§ 1. Abrégé de la théorie	111-120	70
§§ 2-3. Développements de la théorie	121-144	74
CHAPITRE III. — Calcul du facteur secondaire.		
§ 1. Abrégé de la théorie	145-158	89
§§ 2-4. Développements de la théorie	159-161	94
CHAPITRE IV. — Système fondamental de solutions formelles.		
§ 1. Abrégé de la théorie	162-172	99
§§ 2-6. Développements de la théorie	173-203	103

QUATRIÈME PARTIE

Équations différentielles. — Problème fonctionnel.

CHAPITRE PREMIER. — Relations asymptotiques entre solutions formelles et solutions exactes	204-213	129
CHAPITRE II. — Cas particulier du grand théorème.		
§ 1. Énoncé	214	136
§ 2. Abrégé de la théorie	215-237	137
§§ 3-11. Développements de la théorie	238-246	145
CHAPITRE III. — Grand théorème.		
§ 1. Énoncé	247-249	161
§ 2. Abrégé de la théorie	250-269	162
§§ 3-14. Développements de la théorie	270-292	167
CHAPITRE IV. — Équations avec second membre.		
§ 1. Énoncé du problème	293	186
§ 2. Solution	294-298	187
CHAPITRE V. — Variation de l'argument de x	299-300	190
NOTE relative à l'emploi du calcul asymptotique dans l'étude de la convergence		192
TABLE DES DÉFINITIONS ET NOTATIONS destinée à faciliter la lecture		198

MCZ ERNST MAYR LIBRARY
3 2044 128 439 189